# Apuntes sobre Teoría Monetaria

José Luis Cruz Álvarez

Agosto 2017

# Índice general

# Introducción

Este documento agrupa el material de la clase de Teoría y Política Monentaria que impartí en el verano de 2017 en el Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM).

El objetivo de este texto es proveer una revisión a los principales modelos clásicos y neokeynesianos de la literatura de economía monetaria, a través de un enfoque accesible para un estudiante de nivel licenciatura.

Comentarios, dudas o aclaraciones para enriquecer el documento son bienvenidos al correo jl.cruz.alv@gmail.com o jlca@princeton.edu.

# 1

# Saldos Reales en la Función de Utilidad

## 1.1. Introducción

Para utilizar el modelo neoclásico como marco para analizar temas monetarios, se debe especificar un rol para el dinero, tal que los agentes deseen poseerlo en cantidades positivas. En otro caso, los individuos preferirán tener bonos que generan un rendimiento.

En el modelo neoclásico, se considerará que la utilidad de los consumidores depende directamente del consumo y de la tenencia de dinero. Este modelo contempla a los saldos reales como otro bien en la economía.

## 1.2. Descripción de la economía

Se considera una economía sin incertidumbre, pobladad por un consumidor representativo con preferencias:

$$\sum_t \beta^t u(c_t, m_t), \quad \beta \in (0,1)$$

Donde $c_t$ representa el bien de consumo y $m_t := \frac{M_t}{P_t}$ es el flujo de saldos reales. Es decir, $m_t$ no es el número de unidades monetarias $M_t$ (*e.g.*, pesos, dólares), sino el poder adquisitivo en términos del bien de consumo $\frac{M_t}{P_t}$. En este sentido, los saldos reales son un bien durable en la economía. Por el momento, se prescindirá de la decisión ocio - trabajo, más adelante se relajará este supuesto.

En relación con la función de utilidad instantánea $u$, se consideran los supuestos estándar: creciente, cóncava y diferenciable en ambos argumentos. Adicionalmente, se imponen las Condiciones de Inada sobre el bien de consumo:

$$\lim_{c\to 0} u_c = \infty \text{ y } \lim_{c\to\infty} u_c = 0$$

Coloquialmente, la primera de las condiciones de Inada señala que la utilidad marginal por consumir la primera unidad del bien tiende a infinito, mientras que la segunda indica que la utilidad marginal de la última unidad de consumo es nula.[1]

En relación con los saldos reales, se supone que la utilidad marginal es infinito cuando estos tienden a cero.

$$\lim_{m \to 0} u_m = \infty$$

No obstante, habrá saciedad en los saldos reales. En otras palabras, existirá un nivel de saldos reales $m_c$ a partir del cual la utilidad decrece.

$$\forall c \; \exists m_c \text{ st } \forall m \geq m_c, u_m \leq 0$$

Si bien es poco convincente asumir que el dinero fiduciario genera utilidad intrínsecamente, por el simple hecho de atesorarlo, esto es un atajo. En el *Capítulo 4: Tiempo de compras y restricciones reales de recursos* se argumentará que la tenencia de tenencia de saldos reales permite reducir el tiempo o los bienes que se destinan en el proceso de compras. Se mostrará que dichos modelos redundan en el de saldos reales en la función de utilidad estudiado en el presente capítulo.

El consumidor cuenta con una unidad de tiempo, la cual puede destinar para ocio o para trabajo $l_t$, y posee el capital $k_t$ en la economía, por lo que tomará las decisiones de inversión $x_t$. La ley de movimiento del capital es:

$$x_t = k_t - (1 - \delta)k_{t-1}$$

Por el lado de los usos, el hogar puede consumir el bien $c_t$ a un precio nominal $P_t$, invertir en capital $x_t$ a un precio nominal $P_t$, ahorrar en bonos nominales $B_t$ o atesorar saldos nominales $M_t$. En esta economía existe un mercado financiero de bonos que maduran en un periodo, cuyo retorno nominal está dado por la tasa de interés nominal $i_t$.

Por el lado de los recursos, el hogar percibe ingreso laboral $P_t w_t l_t$, renta de capita $P_t q_t k_{t-1}$, el atesoramiento de dinero del periodo anterior $M_{t-1}$, el retorno nominal del bono del periodo anterior $(1+i_{t-1})B_{t-1}$ y una transferencia nominal de suma fija $P_t T_t$ otorgada por el gobierno consolidado. Cabe recalcar que $w_t$ y $q_t$ representan el salario y renta de capital real, mientras que $i_t$ representa la tasa de interés nominal.[2]

Consecuentemente, la restricción presupuestal en términos nominales queda descrita por la siguiente ecuación:

$$P_t c_t + P_t x_t + M_t + B_t = P_t w_t l_t + P_t q_t k_{t-1} + M_{t-1} + (1 + i_{t-1})B_{t-1} + P_t T_t$$

Para expresar la restricción presupuestal en términos reales será útil emplear las siguientes definiciones para los saldos reales, los bonos reales y la inflación:

[1] La importancia de estos supuestos será clara al resolver el problema del consumidor.

[2] El modelo implícitamente presupone que los saldos reales que generan utilidad al consumidor son los que existen al final del periodo, después de haber realizado el gasto en consumo.

$$m_t := \frac{M_t}{P_t}, b_t = \frac{B_t}{P_t} \text{ y } 1 + \pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

De tal suerte, la restricción presupuestal en términos reales se obtiene dividiendo la restricción real entre el nivel de precios $P_t$.

$$c_t + k_t + m_t + b_t = w_t l_t + (q_t + (1 - \delta))k_{t-1} + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + (1 + i_{t-1})\frac{b_{t-1}}{1+\pi_t} + T_t$$

La expresión anterior incorpora la ley de movimiento del capital. Esta economía cuenta con una empresa representativa, la cual requiere de capital $k_{t-1}$ y trabajo para producir el bien de consumo. La tecnología exhibe Rendimientos Constantes a Escala (RCE) en ambos argumentos.

$$y_t = F(k_{t-1}, l_t)$$

En un contexto de competencia perfecta en el mercado de factores y del bien de consumo, RCE implica que los beneficios son nulos.[3] Adicionalmente, se considera que la función $F$ es creciente, cóncava, diferenciable y satisface las condiciones de Inada en ambos argumentos.

$$\text{lím}_{k \to 0} F_k = \infty \text{ y } \text{lím}_{k \to \infty} F_k = 0$$
$$\text{lím}_{l \to 0} F_l = \infty \text{ y } \text{lím}_{l \to \infty} F_l = 0$$

El gobierno consolidado (rama fiscal y monetaria)[4] financia la transferencia de suma fija mediante la emisión de dinero.

$$M_t - M_{t-1} = P_t T_t$$

Los recursos del gobierno consolidado no se derivan del acervo de dinero $M_t$, sino del cambio con respecto al nivel anterior $M_t - M_{t-1}$, en otras palabras, de la impresión de billetes.

Para cerrar el modelo, se requiere determinar una política monetaria del gobierno consolidado. Para asegurar la existencia de un Estado Estacionario, se considera que la oferta de dinero[5] crece a una tasa $\theta > 0$.

## 1.3. Definición del Equilibrio Competitivo

Coloquialmente, un Equilibrio Competitivo se constituye por un conjunto de precios y cantidades tales que cada agente en la economía (*i.e.*, consumidores y empresas) realizan lo que es óptimo para sí mismo (*i.e.*, maximizar utilidad o beneficios) sujeto a ciertas restricciones.

Formalmente, un Equilibro Competitivo para esta economía es $\{c_t, k_t, l_t, M_t, B_t, P_t, i_t, w_t, q_t\}$ tal que:

[3] Lo anterior es fácil de demostrar con las CPO del problema de la empresa y las propiedades de las funciones que exhiben RCE.

[4] En el *Capítulo 3: Interacción entre la Política Monetaria y Fiscal* se estudia el entrelazamiento y las implicaciones de la superposición de una rama sobre la otra.

[5] Debido a que en este modelo no se considera intermediación financiera, y por consiguietne no existe emisión secundaria de dinero, los términos *base monetaria* y *oferta de dinero* se utilizarán indistintamente.

1. Tomando como dado $\{P_t, i_t, w_t, q_t\}$; $\{c_t, k_t, l_t, m_t, b_t\}$ resuelve el problema del consumidor representativo.

$$\max \sum_t \beta^t u(c_t, m_t)$$

$$\text{s.t.}$$
$$c_t + k_t + m_t + b_t = w_t l_t + (q_t + (1-\delta))k_{t-1} + \tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + (1+i_{t-1})\tfrac{b_{t-1}}{1+\pi_t} + T_t$$

$$c_t \geq 0, k_t \geq 0, l_t \in [0,1], m_t \geq 0$$

$$k_{-1}, m_{-1}, b_{-1} \text{ dados}$$

2. Tomando como dado $\{w_t, q_t\}$; $\{k_{t-1}, l_t\}$ resuelve el problema de la empresa

$$\max F(k_{t-1}, l_t) - w_t l_t - q_t k_{t-1}$$

$$\text{s.t. } k_{t-1} \geq 0, l_t \geq 0$$

3. El gobierno consolidado satisface su restricción de recursos y define su política monetaria.

$$\tfrac{M_t - M_{t-1}}{P_t} = T_t \ \forall t$$

$$M_t = (1+\theta)M_{t-1} \ \forall t$$

4. Los mercados (bienes y bonos) se vacían.

$$c_t + k_t = F(k_{t-1}, l_t) + (1-\delta)k_{t-1} \ \forall t$$

$$B_t = 0 \ \forall t$$

En la definición del Equilibrio Competitivo, implícitamente se está suponiendo que el mercado laboral, de capital y de dinero se vacían. Para ser más preciso, se debería diferenciar entre las cantidades demandadas y las ofertadas de trabajo, capital y dinero.[6] Y adicionar la igualdad entre estas en cada mercado. No obstante, por simplicidad en la notación, se optará por el esquema delineado con antelación.

[6]El consumidor oferta trabajo y capital, y demanda dinero. La empresa demanda trabajo y capital. El gobierno consolidado oferta dinero.

## 1.4. Solución del Equilibrio

Primeramente, se resuelve el problema de la empresa. En principio, este es un problema con restricciones de desigualdad, puesto que la demanda de trabajo y capital son no negativas. No obstante, las Condiciones de Inada aseguran una solución interior. Para ejemplificar lo anterior, considere que la cantidad demandada de trabajo es cero, entonces el producto marginal de la primer unidad de trabajo es infinito. Por ende, no puede ser óptimo que la cantidad demandar de trabajo (o capital) sea cero.

De tal suerte, se pueden omitir las condiciones de no negatividad y resolver el problema de la empresa como un problema de optimización libre. Así, se obtienen las CPO:

$$\begin{aligned} l_t: &\quad w_t = F_{l_t} \\ k_{t-1}: &\quad q_t = F_{k_{t-1}} \end{aligned}$$

Donde $F_x := \frac{\partial F}{\partial x}$, con $x \in \{k_{t-1}, l_t\}$.

Ahora bien, en relación con el problema del consumidor es conveniente resolver primeramente la decisión óptima de trabajo. Como el hogar no valora el ocio, y el trabajo genera un ingreso, es claro que la solución debe ser trabajar la unidad de tiempo disponible.[7]

Usando un argumento simétrico al de la empresa, se puede prescindir de las restricciones de no negatividad en el consumo, el capital y los saldos reales. Por consiguiente, se tiene un problema de maximización con una restricción de igualdad.

Dado que el problema se encuentra expresado de manera secuencial, y para evitar la introducción de técnias recursivas, el problema se solucionará mediante la formulación de un Lagrangeano. Así, se asociará el multiplicador $\beta^t \lambda_t$ a la restricción del periodo $t$.[8]

Las CPO del problema del consumidor son:

$$\begin{aligned} c_t: &\quad u_{c_t} = \lambda_t \\ k_t: &\quad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(q_{t+1} + (1-\delta)) \\ m_t: &\quad u_{m_t} = \lambda_t - \beta\lambda_{t+1}(\tfrac{1}{1+\pi_{t+1}}) \\ b_t: &\quad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(\tfrac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}) \end{aligned}$$

Donde $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$, con $x \in \{c_t, m_t\}$. Reordenando estas ecuaciones.

Euler representa el *trade-off* entre consumir hoy y mañana.

$$\frac{1}{\beta}\frac{u_{c_t}}{u_{c_{t+1}}} = F_{k_t} + (1-\delta)$$

[7] Sería erróneo derivar y obtener una CPO con respecto a $l_t$, porque esta variable no tiene una solución interior.

[8] Alternativamente, se podría utilizar el multiplicador $\tilde{\lambda}_t$. Los resultados en términos de la caracterización del equilibrio serán los mismo, considerando que $\tilde{\lambda}_t = \beta^t \lambda_t$.

Factibilidad es una restricción tecnológica (condición de vaciado del mercado de bienes).

$$c_t + k_t = F(k_{t-1}, 1) + (1-\delta)k_{t-1}$$

Saldos reales - Consumo, el lado derecho se puede interpretar como el precio de los saldos reales en términos del bien de consumo.

$$\frac{u_{m_t}}{u_{c_t}} = \frac{i_t}{1+i_t}$$

No Arbitraje, bonos y capital generan el mismo rendimiento. Si hoy invierto una unidad de capital, mañana recibo $q_{t+1}$ y vendo la parte que me queda. Si hoy ahorro una unidad real, estoy ahorrando $P_t$ nominal, mañana recibo $(1+i_t)$, lo divido entre $P_{t+1}$ para que esté en términos reales.

$$\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} = [q_{t+1} + (1-\delta)]$$

Política monetaria. Esta ecuación es necesaira para cerrar el modelo, es decir, para tener el mismo *número* de ecuaciones que de incógnitas.[9]

$$M_t = (1+\theta)M_{t-1}$$

Precios, derivados del problema de la empresa.

$$w_t = F_{l_t}, \quad q_t = F_{k_{t-1}}$$

Las ecuaciones anteriores (más las condiciones iniciales y las de transversalidad) caracterizan la solución para $\{c_t, k_t, M_t, P_t, i_t, q_t, w_t\}$.

Para caracterizar completamente el Equilibrio Competitivo, se requiere, además del sistema de ecuaciones previo, de las condiciones iniciales y de transversalidad para las variables de estado.

Para comenzar la discusión sobre esta variables, es conveniente definir qué se entiende por variables de estado. Son aquellas variables que trascienden de un periodo. En este modelo, las variables de estado son: el capital, el ahorro y los saldos reales.

Primeramente, el consumidor necesita conocer el valor inicial del capital, el ahorro y los saldos reales. De lo contrario, su restricción presupuestal estaría indeterminada.

Ahora bien, para facilitar la interpretación y derivación de las condiciones de transversalidad se hará uso de un argumento heurístico. Por el momento, considere un modelo de horizonte finito. En el referido ambiente, el valor del capital, ahorro y saldos reales para el último periodo es cero, puesto que no tiene sentido guardar recursos para el *próximo* periodo, debido a que no hay tal.

Ahora bien, aplicando ese argumento a una economía con horizonte infinito, se obtiene que el valor de la variable de estado en el *último* periodo es cero.

[9]Dado que el problema considera un horizonte de planeación infinito, en estricto sentido existe un númer infinito (y numerable) de ecuaciones.

$$\text{lím}_{j\to\infty} \beta^j \lambda_{t+j} x_{t+j} = 0, \text{ con } x \in \{k, b, m\}$$

Lo anterior no implica que en el *último* periodo, la variable de estado es cero. Sino que su valor es cero.

Con base en la CPO del bien de consumo, la condición de transversalidad puede ser reescrita como:

$$\text{lím}_{j\to\infty} \beta^j u_{c_{t+j}} x_{t+j} = 0, \text{ con } x \in \{k, b, m\}$$

## 1.5. Estado Estacionario

Un Estado Estacionario se define como un Equilibrio Competitivo en que las variables reales se mantienen constantes en el tiempo. Bajo esta definición y utlizando la ecuación de Euler se puede hallar el capital.

$$\frac{1}{\beta} = F_k(k, 1) + (1 - \delta)$$

Posteriormente, con la condición de factibilidad (o vaciado del mercado de bienes) se puede encontrar el consumo.

$$c = F(k, 1) - \delta k$$

Habiendo caracterizado la parte real de la economía (capital y consumo), se procede a hallar la parte nominal (inflación y tasa de interés). Por definición, en un Estado Estacionario los saldos reales son constantes en el tiempo.

$$m = \frac{M_t}{P_t} = \frac{M_{t+1}}{P_{t+1}} \Longrightarrow \frac{M_{t+1}}{M_t} = \frac{P_{t+1}}{P_t} \Longrightarrow 1 + \pi_{t+1} = 1 + \theta$$

De la condición de Fischer se puede recuperar la tasa de interés nominal.

$$(1 + i) = (1 + r)(1 + \pi) = \frac{1+\theta}{\beta}$$

Y de la condición Saldos reales - Consumo, se despeja para los saldos reales.

$$u_m(c, m) = \left(\frac{i}{1+i}\right) u_c(c, m) = \left(\frac{1+\theta-\beta}{1+\theta}\right) u_c(c, m)$$

Una vez caracterizado el valor de Estado Estacionario de las variables de la economía, se define la *Neutralidad del dinero* de la siguiente manera: En el largo plazo, cualquier cambio en la cantidad nominal de dinero no tiene efectos sobre las variables reales (capital y consumo).

Bajo la neutralidad del dinero, cambios en el crecimiento de la oferta monetaria se reflejan exactamente en el nivel de precios, sin modificar las variables reales. Esta conclusión es idéntica a la del modelo Keynesiano, entendiendo el largo plazo como el Estado Estacionario.

## 1.6. Existencia de un Estado Estacionario

En el análisis de la sección anterior, implícitamente se asumió que existe un Estado Estacionario en esta economía. No osbtante, se requiere verificar que dicho supuesto es correcto. Para tal efecto se considerarán dos especificaciones sobre la función de utilidad.

Si la utilidad instantánea es aditivamente separable, tal que $u(c,m) = v(c) + \phi(m)$, entonces de la ecuación de Saldos Reales - Consumo.

$$\phi'(m) = \left(\tfrac{i}{1+i}\right) v'(c) = \left(\tfrac{1+\theta-\beta}{1+\theta}\right) v'(c)$$

Suponiendo que $\theta \geq \beta - 1$, el lado derecho es positivo y no depende de $m$, el lado izquierdo es decreciente en $m$, va de infinito a algún valor negativo, de forma continua. Por ende, existe $m$ que satisface esta ecuación. Es decir, existe $m$ consistente con un Estado Estacionario.

En el caso en que $\theta < \beta - 1 < 0$, no se podría asegurar la existencia del Estado Estacionario.

Si $u$ no fuera aditivamente separable

$$u_m(c,m) = \tfrac{i}{1+i} u_c(c,m)$$

El lado izquierdo continua siendo decreciente. Si $u_{cm} < 0$, entonces el lado derecho también es decreciente, no podemos asegurar solución única. Por ello, suponemos $u_{cm} > 0$. Es decir, que ambos bienes son complementos.

## 1.7. Costo de la inflación y Regla de Friedman

Costo privado de atesorar dinero es $\frac{i_t}{1+i_t}$ (ecuación Saldos Reales - Consumo). Costo social de imprimir dinero es cero. Esta brecha genera ineficiencias. Entonces, en el Estado Estacionario $i^* = 0 \iff 1 + \pi^* = \frac{1}{1+r} = \beta < 1$. Es decir, habrán deflaciones. Lo anterior se conoce como la regla de Friedman.

Critica de Phelps: Este argumento es cierto cuando el gobierno puede acceder a transferencias de suma fija $T_t$. En la vida real esto no pasa. El gobierno debe acceder a impuestos distorsionantes. En este caso, hay dos distorsiones que no pueden ser llevadas a cero simultáneamente.

Supongamos que el gobierno debe realizar un determinado gasto, el cual puede ser financiado mediante emisión de dinero o impuestos distorsionantes (e.g., al consumo o al retorno del capital). Si implementamos la regla de Friedman ($i_t = 0 \iff \theta = \pi = \beta - 1 < 0$), entonces se estaría reduciendo la emisión de dinero; por lo cual el gobierno tendría que recurrir a impuestos distorsionantes para satisfacer dicho gasto.

No es claro que la Regla de Friedman sea óptima, es decir, que se prefiera minimizar la distorsión asociada a la inflación en contraposición de la que refiere a distorsionar el precio que paga el consumidor del que recibe el productor.

Más adelante, vamos a resolver esta cuestión (combinación óptima de ambos distorsiones) mediante el Problema de Asignación de Ramsey.

El costo en bienestar de la inflación se puede hallar como el área debajo de la curva de demanda de saldos reales y arriba del precio de este, es decir, $\frac{i}{1+i}$.

## 1.8. Planeador Social

Se puede formalizar el argumento de la Regla de Friedman resolviendo el problema del Planeador Social (que es equivalente a hallar óptimos de Pareto) En este problema no hay precios, solo se designan cantidades para maximizar el bienestar social sujeto a las condiciones de vaciado de mercado y a las condiciones de no negatividad.

$$\max \sum_t \beta^t u(c_t, m_t)$$
$$\text{s.t. } c_t + k_t = F(k_{t-1}, l_t) + (1-\delta)k_{t-1}$$
$$c_t \geq 0, k_t \geq 0, l_t \in [0,1], m_t \geq 0$$

Al resolver el problema del Planeador Social, hallamos la ecuación de Euler y una condición sobre la cantidad de saldos reales.

$$u_{m_t} = 0$$

La solución de mercado implementa la asignación del Planeador Social cuando se cumple la regla de Friedman $i_t = 0$.

## 1.9. Decisión Ocio-Trabajo

El resultado de neutralidad del dinero (variales nominales no influyen en la determinación de las variables reales en el largo plazo) no es robusto al considerar decisión de ocio-trabajo del consumidor.

Considere la decisión de ocio-trabajo en el modelo descrito en esta nota. Así, las preferencias del consumidor están dadas por

$$\sum_t \beta^t u(c_t, m_t, 1-l_t)$$

Donde $l_t$ es la oferta de trabajo del consumidor. Podemos definir el Equilibrio Competitivo, considerando que el consumidor ahora elige sobre $l_t$. Todo es idéntico al modelo anterior, solo cambia el problema del consumidor y en el vaciado de mercado ya no aparece $l_t = 1$.

1. Tomando como dado $\{P_t, i_t, w_t, q_t\}$; $\{c_t, k_t, l_t, m_t, b_t\}$ resuelve el problema del consumidor representativo.

$$\max \sum_t \beta^t u(c_t, m_t, 1-l_t)$$
$$\text{s.t. } c_t + k_t + m_t + b_t = w_t l_t + (q_t + (1-\delta))k_{t-1} + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + (1+i_t)\frac{b_{t-1}}{1+\pi_t} + T_t$$
$$k_{-1}, m_{-1}, b_{-1} \text{ dados}$$

4. Los mercados (bienes y bonos) se vacían.

$$c_t + k_t = F(k_{t-1}, 1) + (1-\delta)k_{t-1} \ \forall t$$
$$B_t = 0 \ \forall t$$

Resolviendo el problema del hogar y la empresa, hallamos la ecuación de Ocio - Consumo.[10] En el Estado Estacionario, esta es:

$$\tfrac{u_h(c,m,1-l)}{u_c(c,m,1-l)} = F_l(k,l)$$

A menos que supongamos $u(c,m,1-l) = v(c,1-l)\phi(m)$ o $u(c,m,1-l) = v(c,1-l) + \phi(m)$, la neutralidad del dinero ya no es cierta, puesto que $m$ intervendría en los valores reales $c, l, k$.

Bajo las formas funcionales previamente descritas, la ecuación de Ocio - Consumo es:

$$\tfrac{v_h(c,1-l)}{v_c(c,1-l)} = F_l(k,l)$$

Por ende, la ecuación de Euler, Factibilidad y la ecuación de Ocio - Consumo resuelven para $c, l, k$. Bajo dichas especificaciones de la función de utilidad instantánea, las variables nominales $m$ no intervienen en la determinación de las variables reales.

## 1.10. Apéndice

### I. Equivalencia en los recursos de la economía

Como $F(k,l)$ exhibe RCE, entonces

$$F(k,l) = F_k k + F_l l$$

Utilizando los precios del problema de la empresa

$$w_t = F_{l_t} \text{ y } q_t = F_{k_{t-1}}$$

Implementando lo anterior en la restricción presupuestal.

$$c_t + k_t + m_t + b_t = F(k_{t-1}, l_t) + (1-\delta)k_{t-1} + \tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + (1+i_t)\tfrac{b_{t-1}}{1+\pi_t} + T_t$$

Utilizando el vaciado de los bonos,

$$c_t + k_t + m_t = F(k_{t-1}, l_t) + (1-\delta)k_{t-1} + \tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + T_t$$

Incorporando las restricciones del gobierno,

$$c_t + k_t = F(k_{t-1}, 1) + (1-\delta)k_{t-1}$$

Obtenemos el resultado deseado.

[10] Combinando las CPO de $c_t$ y $l_t$ del problema del hogar con la CPO de la empresa respecto al trabajo

## 1.11. Referencias

(1) Galí, J. (2015). *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework and its Applications*, second edition, Princeton University Press, chapter 2.

(2) Handa, J. (2009). *Monetary Economics*, second edition.

(3) Walsh, C. (2010). *Monetary Theory and Policy*, third edition, The MIT Press, chapter 2.

## 1.12. Ejercicios

### I. Saldos reales en la función de utilidad con distinta descentralización del capital

Considere una economía poblada por un agente representativo cuyas preferencias están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, m_t, 1-l_t)$$

Donde $c_t$ es consumo, $m_t := \frac{M_t}{P_t}$ es la demanda por saldos reales y $l_t$ es el tiempo destinado a trabajar. El consumidor puede consumir, ahorrar $b_t := \frac{B_t}{P_t}$ o atesorar dinero. Sus recursos provienen del ingreso laboral $w_t l_t$, del retorno del bono $(1+i_{t-1})\frac{b_{t-1}}{1+\pi_t}$, los beneficios de la empresa $\Omega_t$ y una transferencia de suma fija $T_t$. El consumidor no posee el capital, sino la empresa representativa.

El objetivo de la empresa es maximizar el flujo descontado de beneficios. Los beneficios nominales instatáneos se definen como el valor de la producción menos el costo nominal laboral menos el costo nominal de la inversión. La empresa cuenta con una tecnología que exhibe Rendimientos Constantes a Escala.

$$y_t = F(k_{t-1}, l_t)$$

El gobierno consolidado financia la provisión de la transferencia de suma fija con emisión de dinero. La oferta monetaria crece a la tasa $\theta$. El gobierno mantiene un presupuesto balanceado en cada periodo.

(I) Solo para este inciso. Considere que la función de utilidad instantánea toma la siguiente forma:

$$u(c_t, m_t, 1-l_t) = \log(c_t) + m_t(\gamma_0 - \gamma_1 m_t) + \gamma_2 \log(1-l_t)$$

¿La función de utilidad exhibe saciedad en los saldos reales?

(II) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(III) Resuelva el problema del consumidor.

(IV) Resuelva el problema de la empresa.

(V) Caracterice el Equilibrio Competitivo. ¿Cuáles son las diferencias respecto al modelo en que el consumidor posee el capital y, por tanto, las decisiones de inversión?

(VI) En el Estado Estacionario, ¿es neutral al dinero este modelo?

(VII) Solo para este inciso. Considere la función de utilidad del primer inciso, ¿para qué valores de los parámetros $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ existe un Estado Estacionario?

(VIII) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social.

(IX) Compare la solución del Equilibrio Competitivo y del Planeador Social y halle la tasa de interés de socialmente óptima. ¿Se cumple la Regla de Friedman?

## II. Saldos reales en la función de utilidad con unidades de eficiencia del trabajo

Considere una economía poblada por un agente representativo cuyas preferencias están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, m_t, 1 - l_t)$$

Donde $c_t$ es consumo, $m_t := \frac{M_t}{P_t}$ es la demanda por saldos reales y $l_t$ es la oferta de trabajo, denominada en unidades de tiempo. El consumidor puede consumir, invertir, ahorrar $b_t := \frac{B_t}{P_t}$ o atesorar dinero. Sus recursos provienen del ingreso laboral, de la renta del capital $r_t k_{t-1}$, del retorno del bono $(1+i_{t-1})\frac{b_{t-1}}{1+\pi_t}$ y de una transferencia de suma fija $T_t$.

El objetivo de la empresa es maximizar el flujo descontado de beneficios. La empresa exhibe una tecnología con Rendimientos Constantes a Escala en el capital y en unidades de eficiencia laboral.

$$y_t = F(k_{t-1}, n_t)$$

Por cada unidad de tiempo de tiempo laborada, el trabajador genera $\phi_t$ unidades de eficiencia. El salario por unidad de eficiencia laboral es $w_t$.

El gobierno consolidado financia la provisión de la transferencia de suma fija con emisión de dinero. La oferta monetaria crece a la tasa $\theta$. El gobierno mantiene un presupuesto balanceado en cada periodo.

(I) Solo para este inciso. Considere que la función de utilidad instantánea toma la siguiente forma:

$$u(c_t, m_t, 1 - l_t) = (\tfrac{1}{1-\sigma})(\tfrac{1}{1-\alpha})[\omega c_t^{1-\varphi} + (1-\omega)m_t^{1-\varphi}]^{\frac{1-\sigma}{1-\varphi}}(1-l_t)^{1-\alpha}$$

¿La función de utilidad exhibe saciedad en los saldos reales?

(II) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(III) Resuelva el problema del consumidor.

(IV) Resuelva el problema de la empresa.

(V) Caracterice el Equilibrio Competitivo.

(VI) En el Estado Estacionario, ¿es neutral al dinero este modelo?

(VII) Solo para este inciso. Considere la función de utilidad del primer inciso, ¿para qué valores de los parámetros $\omega, \varphi, \sigma, \alpha$ existe un Estado Estacionario?

(VIII) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social.

(IX) Compare la solución del Equilibrio Competitivo y del Planeador Social y halle la tasa de interés de socialmente óptima. ¿Se cumple la Regla de Friedman?

## III. Saldos reales en la función de utilidad con interés sobre el dinero

Considere una economía poblada por un agente representativo cuyas preferencias están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, m_t)$$

Donde $c_t$ es consumo y $m_t := \frac{M_t}{P_t}$ es la demanda por saldos reales. El consumidor puede consumir, ahorrar $b_t := \frac{B_t}{P_t}$ o atesorar dinero.

En este especificación, el gobierno paga una tasa de interés nominal $i_t^m$ al consumidor por la tenecia de saldos reales. Por ende, los recursos del consumidor provienen del ingreso laboral $w_t l_t$, del retorno del bono $(1+i_{t-1})\frac{b_{t-1}}{1+\pi_t}$, del retorno de los saldos reales y de una transferencia de suma fija $T_t$.

El objetivo de la empresa es maximizar el flujo descontado de beneficios. La empresa exhibe una tecnología con Rendimientos Constantes a Escala en el capital y trabajo.

$$y_t = F(k_{t-1}, l_t)$$

El gobierno consolidado financia la provisión de la transferencia de suma fija y el pago del interés sobre la tenencia de saldos reales con emisión de dinero. La oferta monetaria crece a la tasa $\theta$. El gobierno mantiene un presupuesto balanceado en cada periodo.

(I) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(II) Resuelva el problema del consumidor.

(III) Asuma que $\lim_{j\to\infty} \beta^j \frac{P_t}{P_{t+j}} u_{c_{t+j}} = 0$. Demuestre e interprete la siguiente igualdad.

$$u_{c_t} = \sum_j \frac{P_t}{P_{t+j}} u_{m_{t+j}}$$

(IV) Resuelva el problema de la empresa.

(V) Caracterice el Equilibrio Competitivo.

(VI) En el Estado Estacionario, ¿es neutral al dinero este modelo?

(VII) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social.

(VIII) Compare la solución del Equilibrio Competitivo y del Planeador Social y halle la tasa de interés de socialmente óptima. ¿Se cumple la Regla de Friedman?

## IV. Saldos reales en la función de utilidad con costo social de producir dinero

Considere una economía poblada por un agente representativo cuyas preferencias están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, m_t)$$

Donde $c_t$ es consumo y $m_t := \frac{M_t}{P_t}$ es la demanda por saldos reales. El consumidor puede consumir, ahorrar $b_t := \frac{B_t}{P_t}$ o atesorar dinero.

Los recursos del consumidor provienen del ingreso laboral $w_t l_t$, del retorno del bono $(1 + i_{t-1})\frac{b_{t-1}}{1+\pi_t}$ y de una transferencia de suma fija $T_t$.

El objetivo de la empresa es maximizar el flujo descontado de beneficios. La empresa exhibe una tecnología con Rendimientos Constantes a Escala en el capital y trabajo.

$$y_t = F(k_{t-1}, l_t)$$

El gobierno determina su política monetaria de acuerdo a $M_t = M$ si $t$ es par y $M_t = M' > M$ si $t$ es impar. El gobierno mantiene un presupuesto balanceado en cada periodo.

Al aumentar la cantidad de dinero en la economía, en los periodos impares, la autoridad monetaria incurre en un costo nominal de $\eta(M_t - M_{t-1})$ por la impresión de dinero. Sin embargo, se puede reducir la cantidad de dinero en la economía sin costo alguno, es decir, destruir dinero es gratis.

(I) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(II) ¿Es neutral al dinero este modelo? Puede asumir que la utilidad instantánea es aditivamente separable en sus argumentos.

(III) Argumente cuál es la tasa de interés socialmente óptima (no trate de resolver el modelo, es más sencillo razonar). ¿Se satisface la regla de Friedman?

## V. Saldos reales en la función de utilidad con tecnología imperfecta en la preservación del dinero

El dinero no está hecho de papel, sino de semillas de cacao. Cada periodo estas semillas se deprecian a una tasa $\phi \in (0, 1)$. Por lo que el periodo siguiente, solo permanece una porción $1 - \phi$ de los saldos nominales. Derivar el equilibrio.

## VI. Saldos reales en la función de producción

Asuma que la empresa representativa que produce el bien de consumo en la economía posee la siguiente tecnología:

$$y_t = F(k_{t-1}, l_t, m_t)$$

Donde $F$ exhibe rendimientos constantes a escala, y $m_t$ son los saldos reales que mantiene la empresa.

La razón para introducir los saldos reales como insumo en la función de producción es que la tenencia de este activo facilita el pago de salarios y de la renta de capital.

La empresa renta el capital del consumidor representativo, pero decide sobre el acervo de saldos reales. En este sentido, la empresa enfrenta un problema dinámico.

Supongo que se podría derivar una condición análoga a $u_{c_t} = \sum_j \frac{P_t}{P_{t+j}} u_{m_{t+j}}$, pero con productividades marginales.

Basado en Handa (2000).

## VII. Saldos reales en la función de utilidad con $J$ empresas e $I$ consumidores

## VIII. Saldos reales en la función de utilidad con utilización del capital

Tecnología $y_y = F(h_t k_{t-1}, l_t)$

$h_t$ es un índice para la tasa de utilización del capital. Esta variable, la cual determina el flujo de servicios de capital $h_t k_{t-1}$, representa la intensidad del uso del capital, esto es, la velocidad de la operación o el número de horas de uso de capital por periodo.

Ley de movimientoento del capital $k_t = k_{t-1}[1 - \delta(h_t)] + i_t$

Donde $0 \leq \delta \leq 1$, $\delta' > 0$ y $\delta'' > 0$

Basado en Ïnvestment, Capacity Utilization, and the Real Business Cycle", Greenwood, J, Z. Hercowitz and G. Huffman.

## IX. Saldos reales en la función de utilidad con costo de invertir en capital

Ley de movimiento de capital $k_t = (1 - \delta)k_{t-1} + i_t$

En la restricción presupuestal del consumidor, restar el costo de inversión $\Phi(\frac{i_t}{k_{t-1}})k_{t-1}$, donde $\Phi' > 0$, $\Phi'' \geq 0, \Phi(\delta) = 0$ and $\Phi'(\delta) = 0$

Tobin's Q.

## X. Saldos reales en la función de utilidad con distinta especificación de la ley de movimiento del capital

Considere $k_t = \chi x_t^{\theta} k_{t-1}^{(1-\theta)} + (1 - \delta)k_{t-1}$, con $\theta \in (0, 1)$ y $x_t$ es inversión.

## XI. Saldos reales en la función de utilidad con descuento hiperbólico

Preferencias dadas por

$$u(c_1, m_1, 1 - l_1) + \sum_t \nu\beta^t u(c_t, m_t, 1 - l_t), \quad \nu \in (0, 1)$$

Comparar cómo cambian las decisiones en el periodo $t = 1$, contra $t = 2$.
Discutir existencia de un Estado Estacionario.

## XII. Saldos reales en la función de utilidad con descuento intertemporal

Preferencias dadas por

$$\sum_t \rho_t u(c_t, m_t, 1 - l_t), \quad \rho_t \in (0, 1)$$

Explicar por qué esta formulación es más general que la habitual $\beta^t$. Discutir bajo qué condiciones existe un Estado Estacionario en la economía.

## XIII. Saldos reales en la función de utilidad con formación de hábitos

Preferencias dadas por

$$\sum_t \beta^t u(c_t - \alpha c_{t-1}, m_t, 1 - l_t), \quad \alpha \in (0, 1)$$

## XIV. Saldos reales en la función de utilidad con dos tipos de activos

Considerar dos activos (uno que tiene tasa de interés y otro con precio del bono o uno con maduración de un periodo y el otro de dos). Hallar la condición de arbitraje entre los dos bonos. Ahora bien, suponga que un activo está restringido a ser positivo, cómo se modificaría la condición de arbitraje? Intreprete su respuesta.

## XV. Saldos reales en la función de utilidad con bienes superiores

Preferencias dadas por

$$\sum_t \beta^t u(c_t + \bar{c}, 1 - l_t, m_t), \quad \bar{c} > 0$$

$\bar{c} > 0$ implica que $c$ es un bien superior. Alternativamente, considere $-\bar{c}$ y argumente que $\bar{c}$ es un nivel mínimo de consumo.

## XVI. Saldos reales en la función de utilidad con activos líquidos e ilíquidos

Considere la siguiente restricción presupuestal:

$$c_t + k_t + m_t + b_t + d_t + \chi(d_t, a_t) = ...$$
$$a_t = (1 + r_t^a)a_{t-1} + d_t$$

Activos $a_t$ son ilíquidos en el sentido de que los consumidores deben pagar un costo $\chi(d_t, a_t)$ por depositar o retirar recursos de la cuenta ilíquida. La cantidad de depósitos (o retiros) en la cuenta ilíquida se denota por $d_t$. La tasa de interés del activo líquidoes $r_t^b$ y la del activo ilíquido es $r_t^a$.

Encontrar la condición de arbitraje entre bonos líquidos e ilíquidos. Discutir.

## XVII. Saldos reales en la función de utilidad con inflación medida a través del cambio en salarios

En todos los ejercicios se mide inflación como el cambio en precios, ahora defina la inflación como el cambio en salarios:

$$1 + \psi_t = \frac{W_t}{W_{t-1}}$$

Donde $W_t$ es el precio nominal del trabajo. Repetir el análisis, pero en función de esta nueva inflación. Todas las variables reales tinenen que estar expresadas en términos del salario, por ejemplo $m_t := \frac{M_t}{W_t}$.

## XVIII. Saldos reales en la función de utilidad con calidad del bien de consumo

Preferencias dadas por

$$\sum_t \beta^t u(c_t, q_t, 1 - l_t)$$

Restricción presupuestal tipo $P_t(q_t)c_t + ... =$. Consumidor maximiza sobre calidad $q_t$.

Tecnología dada por:

$$y_t = \frac{1}{q_t} F(k_{t-1}, l_t)$$

# 2

# Determinación del precio de un activo

## 2.1. Introduccción

Se estudiará un modelo en que la tecnología exhibe Rendimientos Decrecientes a Escala, lo que implica la existencia de beneficios. Estos beneficios serán intercambiados en un mercado perfectamente competitivo. La pregunta a responder es: ¿cuánto vale una acción de la empresa?

## 2.2. Descripción de la economía

Considere una economía sin incertidumbre poblada por un consumidor representativo con preferencias descritas por la siguiente función de utilidad:

$$\sum_t \beta^t u(c_t, m_t, 1 - l_t)$$

Donde $c_t$ representa el bien de consumo y $m_t := \frac{M_t}{P_t}$ los saldos reales.

Existe una empresa representativa, la cual opera con una tecnología que exhibe Rendimientos Decrecientes a Escala.

$$y_t = F(k_{t-1}, l_t)$$

Por consiguiente, esta empresa generará beneficios reales $\Omega_t$ estrictamente positivos.

El consumidor puede consumir, ahorrar en bonos, invertir en capital, atesorar saldos reales o comprar una proporción $s_t$ de la empresa. Como $s_t$ es una proporción de la empresa, esta tiene que estar en $[0, 1]$.

El precio real de unidad de propiedad de la empresa es $\rho_t$ y su dividendo es $\Omega_t$. Es decir, si el consumidor compra una unidad de propiedad de la empresa a un precio $\rho_t$ en el periodo $t$, entonces en cada periodo subsecuente recibirá el flujo de dividendos $\{\Omega_{t+k}\}$. Alternativamente, en lugar de recibir el flujo de dividendos, el consumidor puede recibir el dividendo y vender la propiedad de la empresa en el periodo $t+1$.

De esta manera, la restricción de recursos del consumidor puede escribirse como:

$$c_t + k_t + m_t + b_t + \rho_t s_t =$$
$$w_t + (q_t + (1-\delta))k_{t-1} + \tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + (1+i_{t-1})\tfrac{b_{t-1}}{1+\pi_t} + (\rho_t + \Omega_t)s_{t-1} + T_t$$

Donde $T_t$ es una transferencia de suma fija que provee el gobierno al consumidor, la cual es financiada con emisión de dinero.

## 2.3. Definición del Equilibrio Competitivo

Un Equilibrio Competitivo para esta economía es $\{c_t, k_t, l_t, \Omega_t, s_t, M_t, B_t, P_t, i_t, w_t, q_t, \rho_t\}$ tal que:

1. Tomando como dado $\{P_t, i_t, w_t, q_t, \rho_t, \Omega_t\}$; $\{c_t, k_t, l_t, m_t, b_t, s_t\}$ resuelve el problema del consumidor representativo.

$$\max \textstyle\sum_t \beta^t u(c_t, m_t, 1-l_t)$$
$$\text{s.t. } c_t + k_t + m_t + b_t + \rho_t s_t =$$
$$w_t + (q_t + (1-\delta))k_{t-1} + \tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + (1+i_{t-1})\tfrac{b_{t-1}}{1+\pi_t} + (\rho_t + \Omega_t)s_{t-1} + T_t$$
$$k_{-1}, m_{-1}, b_{-1}, s_{-1} \text{ dados}$$

2. Tomando como dado $\{w_t, q_t\}$; $\{k_{t-1}, l_t\}$ resuelve el problema de la empresa

$$\max F(k_{t-1}, l_t) - w_t l_t - q_t k_{t-1}$$

Y $\Omega_t$ son los beneficios instantáneos de la empresa en el periodo $t$.

3. El gobierno consolidado satisface su restricción de reursos y define su política monetaria.

$$\tfrac{M_t - M_{t-1}}{P_t} = T_t \ \forall t$$
$$M_t = (1+\theta)M_{t-1} \ \forall t$$

4. Los mercados (bienes, bonos y acciones) se vacían.

$$c_t + k_t = F(k_{t-1}, l_t) + (1-\delta)k_{t-1} \ \forall t$$
$$B_t = 0 \ \forall t$$
$$s_t = 1 \ \forall t$$

## 2.4. Solución del Equilibrio

Se obtienen las CPO del problema del consumidor.

$$\begin{aligned}
c_t: &\quad u_{c_t} = \lambda_t \\
l_t: &\quad u_{h_t} = \lambda_t w_t \\
k_t: &\quad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(q_{t+1} + (1-\delta)) \\
m_t: &\quad u_{m_t} = \lambda_t - \beta\lambda_{t+1}\left(\tfrac{1}{1+\pi_{t+1}}\right) \\
b_t: &\quad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}\tfrac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \\
s_t: &\quad \lambda_t\rho_t = \beta\lambda_{t+1}(\rho_{t+1} + \Omega_{t+1})
\end{aligned}$$

Y las CPO del problema de la empresa.

$$\begin{aligned}
l_t: &\quad w_t = F_{l_t} \\
k_{t-1}: &\quad q_t = F_{k_{t-1}}
\end{aligned}$$

Combinando las CPO, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

Ecuación de Euler

$$\tfrac{1}{\beta}\tfrac{u_{c_t}}{u_{c_{t+1}}} = F_{k_t} + (1-\delta)$$

Ocio - Consumo

$$\tfrac{u_{h_t}}{u_{c_t}} = F_{l_t}$$

Factibilidad

$$c_t + k_t = F(k_{t-1}, l_t) + (1-\delta)$$

Saldos reales - Consumo

$$\tfrac{u_{m_t}}{u_{c_t}} = \tfrac{i_t}{1+i_t}$$

Política monetaria

$$M_t = (1+\theta)M_{t-1}$$

Salario, renta de capital, tasa de interés, beneficios de la empresa y precio de la propiedad de la empresa

$$\begin{aligned}
&w_t = F_{l_t}, \quad q_t = F_{k_{t-1}}, \quad (1+i_t) = (1+\pi_{t+1})(q_{t+1} + (1-\delta)) \\
&\Omega_t = F_t - F_{l_t}l_t - F_{k_{t-1}}k_{t-1}, \quad \rho_t u_{c_t} = \beta u_{c_{t+1}}(\Omega_{t+1} + \rho_{t+1})
\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones anterior (más las condiciones iniciales y las de transversalidad) caracterizan la solución para $\{c_t, k_t, l_t, \Omega_t, M_t, P_t, i_t, w_t, q_t, \rho_t\}$. En particular, las condiciones de transversalidad están dadas por:

$$\begin{aligned}
&\text{lím}_{j\to\infty}\beta^j\lambda_{t+j}k_{t+j} = 0, \quad \text{lím}_{j\to\infty}\beta^j\lambda_{t+j}s_{t+j} = 0 \\
&\text{lím}_{j\to\infty}\beta^j\lambda_{t+j}b_{t+j} = 0, \quad \text{lím}_{j\to\infty}\beta^j\lambda_{t+j}m_{t+j} = 0
\end{aligned}$$

## 2.5. Precio del activo

De la ecuación para la propiedad de la empresa.

$$\rho_t u_{c_t} = \beta u_{c_{t+1}}(\Omega_{t+1} + \rho_{t+1})$$

El lado derecho representa el costo de comprar una unidad de propiedad de la empresa, puesto podría consumirla en lugar de invertirla. El lado izquierdo representa el beneficio, debido a que mañana el consumidor recibe el dividendo del árbol más el valor de la venta.

Adicionalmente, podemos manipular la expresión anterior

$$\rho_t u_{c_t} = \beta u_{c_{t+1}}(\Omega_{t+1} + \rho_{t+1}) =$$
$$\beta u_{c_{t+1}}\Omega_{t+1} + \beta u_{c_{t+1}}\rho_{t+1} =$$
$$\beta u_{c_{t+1}}\Omega_{t+1} + \beta(\beta u_{c_{t+2}}(\Omega_{t+2} + \rho_{t+2})) =$$
$$\beta u_{c_{t+1}}\Omega_{t+1} + \beta^2 u_{c_{t+2}}\Omega_{t+2} + \beta^2 u_{c_{t+2}}\rho_{t+2} =$$
$$\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u_{c_{t+j}}\Omega_{t+j} + \lim_{j\to\infty} \beta^j u_{c_{t+j}}\rho_{t+j}$$

El primer término del lado derecho representa el beneficio de mantener la unidad de la empresa por siempre. A ello se le conoce como el "Valor fundamental del activo". Al segundo término del lado derecho se le conoce como "Burbuja".

En este modelo, la burbuja será igual a cero. Si la burbuja fuera positiva, el costo supera el beneficio de mantener la propiedad del árbol. Entonces, el consumidor vendería la propiedad de la empresa, su demanda caería y con ella el precio hasta igualar costo y beneficio. Simétrico argumento cuando la burbuja es negativa.

Alternativamente, podemos usar la condición de transversalidad de la propiedad de la empresa, la de vaciado y la CPO de $c_t$ para que la burbuja sea cero. Es decir,

$$\lim_{j\to\infty} \beta^j \lambda_{t+j}\rho_{t+j}s_{t+j} = \lim_{j\to\infty} \beta^j \lambda_{t+j}\rho_{t+j} = 0$$

De tal suerte, la ecuación para la propiedad de la empresa colapsa a:

$$\rho_t u_{c_t} = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u_{c_{t+j}}\Omega_{t+j}$$

Diviendo sobre la utilidad marginal del consumo y utilizando la ecuación de Euler.

$$\rho_t = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{u_{c_{t+j}}}{u_{c_t}}\Omega_{t+j} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\beta \frac{u_{c_{t+1}}}{u_{c_t}}\right)\left(\beta \frac{u_{c_{t+2}}}{u_{c_{t+2}}}\right)...\left(\beta \frac{u_{c_{t+j}}}{u_{c_{t+j-1}}}\right)\Omega_{t+j} =$$
$$\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(1+r_t)(...)(1+r_{t+j-1})}\right)\Omega_{t+j}$$

Así, el precio de la propiedad de la empresa $\rho_t$ es el flujo descontado (por la tasa de interés real) de los beneficios del activo.

## 2.6. Referencias

(1) Sargent, T. y L. Ljungqvist (2012), *Recursive Macroeconomic Theory*, third edition, The MIT Press.

## 2.7. Ejercicios

### I. Con precios nominales y utilidad logarítmica

Considerar $\rho_t$ como precio nominal y $\Omega_t$ como beneficios nominales. Demostrar que
$\rho_t = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(1+i_t)(...)(1+i_{t+j-1})} \right) \Omega_{t+j}$
Proponer utilidad logarítimica $u(c, m) = \log(c) + v(m)$ y tecnología $F(k, l) = k^{\alpha} l^{\nu}$, con $\alpha + \nu < 1$. Mostrar que el precio $\rho$ es proporcional al dividendo y a la produccción.

### II. Determinación del precio de un activo con árbol de Lucas

Considere una economía en la que el bien de consumo es producido mediante dos fuentes: (i) producción realizada por la empresa representativa $y_t$ y (ii) dotaciones $z_t$.

Esta economía está poblada por un consumidor representativo, con función de utilidad:

$$\sum_t \beta^t u(c_t, m_t, l_t)$$

El consumidor puede consumir, invertir, atesorar saldos reales o intercambiar la dotación $z_t$ en un mercado competitivo. De manera más específica, el consumidor puede comprar una proporción $s_t \in [0, 1]$ de la dotación a un precio $\rho_t$ en el periodo $t$.

De tal suerte, en el periodo $t$ el consumidor puede comprar la proporción $s_t$ a un precio $\rho_t$, tal que en el siguiente periodo reciba la dotación $z_{t+1}$ y el valor de la venta de la propiedad de la dotación.

Los recursos del consumidor provienen de su ingreso laboral, de la renta del capital, del atesoramiento de saldos reales, del intercambio de la dotación y de una transferencia de suma fija.

Dicha transferencia de suma fija es provista porel gobierno y financiada con emisión de dinero. La oferta monetaria crece a la tasa $\theta$.

La empresa representativa opera con una tecnología que exhibe Rendimientos Constantes a Escala.

$$y_t = F(k_{t-1}, l_t)$$

En términos del vaciado del mercado de bienes, el consumo y la inversión igualan la producción y la dotación.

(I) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(II) Resuelva el problema de la empresa.

(III) Resuelva el problema del consumidor.

(iv) Caracterice el equilibiro.

(v) Determine el precio de la propiedad de la dotación.

(vi) Solo para este inciso. Considere la siguiente forma de la función de utilidad instantánea:

$$u(c, m, 1-l) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + v(m, 1-l)$$

Demostrar que el precio de la dotación es proporcional a $z_t^{\sigma}$.

(vii) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social.

(viii) ¿Cuál es el precio socialmente óptimo de los bonos perpetuos? Interprete.

## III. Determinación del precio de un activo con bonos perpetuos

Considere una economía poblada por un consumidor representativo, cuyas preferencias están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, m_t, l_t)$$

Donde $c_t$ es el bien de consumo, $m_t := \frac{M_t}{P_t}$ son los saldos reales y $l_t$ el tiempo dedicado a trabajar. El consumidor puede consumir, invertir, ahorrar o atesorar dinero.

No obstante, en lugar de un mercado de bonos con maduración de un periodo en el que se recibe $(1+i_t)$ del principal el periodo posterior, existe un mercado de bonos perpetuos. Es decir, si el consumidor compra una unidad del bono perpetuo nominal $B_t$ en el periodo $t$ a un precio nominal $v_t$, entonces en cada periodo subsecuente, recibe una unidad nominal. Alternativamente, en lugar de recibir el flujo de retornos del bono, el consumidor puede recibir el retorno del bono y vender el bono en el periodo $t+1$. Cabe recalcar que solo existe un tipo de bonos en esta economía: los perpetuos.

Así, los ingresos del consumidor provienen del ingreso laboral, de la renta del capital, del atesoramiento del dinero, del retorno del bono perpetuo y de una transferencia de suma fija. Dicha transferencia de suma fija es provista por el gobierno y financiada con emisión de dinero. La oferta monetaria crece a la tasa $\theta$.

Existe una empresa representativa, la cual opera con una tecnología que exhibe Rendimientos Constantes a Escala.

$$y_t = F(k_{t-1}, l_t)$$

(i) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(ii) Resuelva el problema de la empresa.

(iii) Resuelva el problema del consumidor.

(IV) Caracterice el equilibiro.

(V) Determine el precio de los bonos en un Estado Estacionario. ¿Qué sucede con este cuando $\theta = 0$? Interprete.

(VI) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social.

(VII) ¿Cuál es el precio socialmente óptimo de los bonos perpetuos? Interprete.

## IV. Determinación del precio de un activo con compras de oro

Utilidad del consumidor $\sum_t \beta^t u(c_t, m_t, g_t)$, con saciedad en el oro.

Restricción presupuestal $c_t + k_t + m_t + b_t + \gamma_t g_t = w_t + (q_t + (1-\delta))k_{t-1} + (1 + i_{t-1})\frac{b_{t-1}}{1+\pi_t} + \frac{1}{1+\pi_t} m_{t-1} + \gamma_t g_{t-1}$

Donde $g_t$ es oro, el cual se halla en una oferta fija $g$, y $\gamma_t$ el precio real del oro.

Cuál es el precio del oro?

Resolver planeador social y hallar el precio socialmente óptimo del oro.

# 3

# Interacción entre la Política Monetaria y Fiscal

## 3.1. Introducción

El resultado de optimalidad de la regla de Friedman depende crucialmente de la existencia de impuestos endógenos de suma fija que permitan balancear la restricción de recursos del gobierno.

Si el gobierno debe escoger entre recaudar recursos mediante algún impuesto distorsionante (e.g., consumo, trabajo, capital) o mediante el impuesto inflacionario, en general la regla de Friedman no es óptima (Crítica de Phelps).

En las secciones posteriores se analizará la interacción entre política monetaria y fiscal. Adicionalmente, se planteará un problema alternativo del gobierno, en el cual no busca maximizar el bienestar del consumidor representativo, sino los recursos que obtiene derivados del señoreaje.

## 3.2. Déficits fiscales

Considere un gobierno (consolidado) que, además de emitir dinero nominal $M_t$ y realizar una transferencia $T_t$, realiza un gasto $g_t$ de bienes y puede incurrir en deuda nominal $D_t$.[1] Su restricción de recursos es

$$P_t g_t + P_t T_t + (1 + i_{t-1})D_{t-1} = M_t - M_{t-1} + D_t$$

Se puede reinterpretar $\tau_t = -T_t$ como impuestos.

$$P_t g_t + (1 + i_{t-1})D_{t-1} = M_t - M_{t-1} + P_t \tau_t + D_t$$

Es decir, el gasto del gobierno más el pago de la deuda debe ser financiado con emisión monetaria, impuestos o deuda. Alternativamente,

[1] Notar que en el Equilibrio Competitivo, el ahorro del consumidor debe ser igual a la deuda del gobierno: $B_t = D_t \; \forall t$.

$$P_t(g_t - \tau_t) + i_{t-1}D_{t-1} = (M_t - M_{t-1}) + (D_t - D_{t-1})$$

El défcit primario más el pago de intereses de la deuda, tiene que reflejarse en los pasivos, mediante una mayor emisión de dinero o un incremento en la deuda.

Considere una situación inicial en la que no se emite dinero $M_t = M_{t-1}$, el acervo de deuda es nulo $D_t = 0$ y el gasto público se financia mediante impuestos $g_t = \tau_t$. Suponga que en el period $t = 1$ se genera un déficit fiscal $g_1 > \tau_1$

### I. Impuesto inflacionario

Una forma de balancear la restricción presupuestal es mediante la emisión de dinero, lo cual implicaría que $M_1 > M_0$.

$$P_1(g_1 - \tau_1) = M_1 - M_0$$

La inflación aumenta en el primer periodo. El efecto es de corto plazo, en los periodos posteriores la inflación se mantiene constante.

### II. Deuda

Alternativamente, el gobierno puede incurrir en deuda $D_1 > 0$ para solventar el déficit fiscal.

$$P_1(g_1 - \tau_1) = D_1$$

Si bien no hay déficit fiscal en el periodo $t = 2$, el gobierno incurrió en deuda, por lo que tiene que liquidarla. Para tal efecto, puede obtener más deuda, la cual no corregiría el problema, puesto que el dilema se perpetuaría.

Si el gobierno no planea contener la expansión del gasto público o aumentar impuestos, entonces tendrá que hacer uso del señoreaje para balancear su restricción de recursos.

En este sentido, en un contexto de déficits crónicos, la deuda solamente reasigna el impuesto inflacionario en el tiempo. Si estos déficits no se corrigen, será inminente el incremento en precios, debido al incremento en la oferta monetaria.

## 3.3. Aritmética desagradable de Sargent y Wallace

Considere una situación inicial en la que no se emite dinero $M_t = M_{t-1}$, el acervo de deuda es nulo $D_t = 0$ y el gasto público se financia mediante impuestos $g_t = \tau_t$. Suponga que en el period $t = 1$ se realiza una operación de mercado abierto contraccionista: venta de bonos ($M_1 < M_0$ y $D_1 > D_0 = 0$).

$$0 = (M_1 - M_0) + D_1$$

Se reducirá la inflación en el primer periodo. En el segundo periodo, se tiene que pagar la deuda. Suponiendo que la rama fiscal no adecúa su política, la rama monetaria tendrá que aumentar la oferta monetaria.

$$(1+i_1)D_1 = M_2 - M_1$$

En el segundo periodo, se genera inflación. En el largo plazo, las operaciones de mercado abierto generan el efecto contrario sobre la inflación.

Desagradable aritmética de la política monetaria (Sargent y Wallace): El gobierno puede creer que combate la inflación mediante políticas monetarias contractivas que reducen la cantidad de dinero mediante operaciones de compra de deuda pública. Sin embargo, esas políticas solo postergan la inflación hacia el futuro, a menos que sean acompañadas de una reducción en el déficit fiscal.

Nota que el razonamiento anterior no involucra ningún comportamiento optimizador de los agentes, simplemente se basa en manipular la restricción de recursos del gobierno.

Alternativamente, este razonamiento puede derivarse de la restricción intertemporal del gobierno. Escriba la restricción de recursos del gobierno del periodo $t$ y del periodo $t+1$.

$$P_t(g_t - \tau_t) + (1+i_{t-1})D_{t-1} = (M_t - M_{t-1}) + D_t$$

$$P_{t+1}(g_{t+1} - \tau_{t+1}) + (1+i_t)D_t = (M_{t+1} - M_t) + D_{t+1}$$

Incorporando la segunda en la primera.

$$P_t(g_t - \tau_t) + \tfrac{1}{1+i_t}P_{t+1}(g_{t+1} - \tau_{t+1}) + (1+i_{t-1})D_{t-1} =$$

$$(M_t - M_{t-1}) + \tfrac{1}{1+i_t}(M_{t+1} - M_t) + \tfrac{1}{1+i_t}D_{t+1}$$

Continuando con esta iteración, se obtiene.

$$\textstyle\sum_j (\prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1+i_k})P_{t+1}(g_{t+1} - \tau_{t+1}) + (1+i_{t-1})D_{t-1} =$$

$$\textstyle\sum_j (\prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1+i_k})(M_{t+j} - M_{t+j-1}) + \text{lím}_{j\to\infty}(\prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1+i_k})D_{t+j}$$

Utilizando la condición de no Ponzi, se reescribe la ecuación anterior como:

$$(1+i_{t-1})D_{t-1} = VP_t(\text{superávit fiscal}) + VP_t(\text{emisión monetaria})$$

Donde $VP_t(x)$ hace referencia al valor presente de $x$ en el periodo $t$.

En un contexto de dominancia fiscal, en que la rama monetaria debe adecuarse para satisfacer la restricccción de recursos del gobierno dada una secuencia de gasto y recaudación; un aumento del valor presente del déficit fiscal forzosamente generará un aumento en el valor presente del señoreaje para satisfacer la igualdad. O bien, si la autoridad monetaria deseara reducir el señoreaje, y con ella la inflación en el periodo contemporáneo, entonces se deberá incrementar el señoreaje en algún periodo posterior.

## 3.4. Política monetaria maximizadora de recursos

Anteriormente, habíamos visto que, bajo ciertos supuestos, la Regla de Friedman ($i_t = 0$) era óptima en el sentido de maximizar el bienestar del consumidor representativo.

Alternativamente, podría considerarse que el gobierno persigue un objetivo distinto, por ejemplo, maximizar los recursos que obtiene. En este sentido, cabe preguntarse, ¿existe una política monetaria que maximice el señoreaje? En caso de ser así, ¿cuál sería dicha política?

Primeramente, se define el señoreaje (ingresos derivados de la emisión de dinero) como:

$$S_t := \frac{i_t}{1+\pi} m_{t-1}$$

La defrinción anterior, se puede tomar como una definición alternativa al señoreaje. Habitualmente, pensábamos en este como $m_t - \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t}$. O bien, se puede argumentar manipulando la restricción de recursos del gobierno como se muestra a continuación.

Considere la restricción de recursos del gobierno.

$$g_t - \tau_t + (1 + i_{t-1})\frac{d_{t-1}}{1+\pi_t} = m_t + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + d_t$$

Se agrupan los pasivos del gobierno $l_t := m_t + d_t$ para obtener.

$$g_t - \tau_t + (1 + i_{t-1})\frac{l_{t-1}}{1+\pi_t} = l_t + i_{t-1}\frac{m_{t-1}}{1+\pi_t}$$

El último término del lado derecho puede ser interpretado como el señoreaje.

Ahora bien, una vez convencidos (o al menos aceptado) la definición de señoreaje, vale la pena hacer un par de consideraciones: (i) Bajo la Regla de Friedman, el señoreaje debe ser cero. (ii) En el Estado Estacionario, el señoreaje se puede reescribir como:

$$S = \frac{1}{\beta}\frac{i}{1+i} m$$

Para poder maximizar la expresión previa en términos de la tasa de interés $i$, necesitamos dar una forma explícita a la demanda de dinero $m$. Recordemos que la demanda de dinero $m$, va a ser una función decreciente de su costo de oportunidad.

Con tal objetivo, recuerde el modelo de Saldos reales en la función de utilidad y la ecuación Saldos reales - Consumo.

$$u_{m_t} = \frac{i_t}{1+i_t} u_{c_t}$$

Más aún, considere la siguiente forma funcional para la utilidad instantánea.

$$u(c_t, m_t) = \log(c_t) + m_t(\gamma_0 - \gamma_1 \log(m_t))$$

Entonces la ecuación Saldos reales - Consumo se puede reexpresar como:

$$\gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_1 \log(m_t) = \frac{i_t}{1+i_t} \frac{1}{c_t}$$

Al despejar para la demanda de saldos reales.

$$m_t = \exp(\frac{\gamma_0 - \gamma_1}{\gamma_1}) \exp(-\frac{1}{\gamma_1 c_t} \frac{i_t}{1+i_t})$$

Considere un Estado Estacionario con neutralidad del dinero.[2] Entonces, el señoreaje se puede escribir como:

$$S(i) = \frac{1}{\beta} \frac{i}{1+i} \exp(\frac{\gamma_0 - \gamma_1}{\gamma_1}) \exp(-\frac{1}{\gamma_1 c} \frac{i}{1+i})$$

El término $\frac{1}{\beta}\frac{i}{1+i}$ puede ser interpretado como la tasa de la recaudación, el cual es creciente en la tasa de interés nominal $i$. El término $\exp(\frac{\gamma_0-\gamma_1}{\gamma_1}) \exp(-\frac{1}{\gamma_1 c} \frac{i}{1+i})$ puede ser interpretado como la base de la recaudación, el cual es decreciente en la tasa de interés nominal $i$.

De tal suerte, el señoreaje aumenta cuando la inflación es relativamente baja, pero eventualmente decrece ante incrementos en la inflación. Es decir, el señoreaje exhibe una relación similar a la curva de Laffer, en la recaudación de impuestos distorsionantes.

Finalmente, se puede calcular la tasa de interés que maximiza los recursos del gobierno. Para tal efecto, es conveniente diferenciar con respecto a $\frac{i}{1+i}$, en lugar de $i$.

$$\max \frac{1}{\beta}\omega \exp(\frac{\gamma_0 - \gamma_1}{\gamma_1}) \exp(-\frac{1}{\gamma_1 c}\omega)$$

Donde $\omega := \frac{i}{1+i}$

$$\begin{aligned} \omega : \quad \frac{1}{\beta} \exp(\frac{\gamma_0 - \gamma_1}{\gamma_1})[\omega(-\frac{1}{\gamma_1 c}) \exp(\frac{1}{\gamma_1 c}) + \exp(\frac{1}{\gamma_1 c})] &= 0 \\ 1 - \frac{\omega}{\gamma_1 c} &= 0 \\ \omega = \frac{i}{1+i} &= \gamma_1 c \end{aligned}$$

Del problema anterior se desprende que los recursos que se pueden obtener por medio del señoeraje son limitados.

## 3.5. Referencias

(1) Urrutia, C. (2011). *Curso de Macroeconomía Avanzada: "Polìtica Fiscal y Monetaria Óptima"*.

(2) Walsh, C. (2010). *Monetary Theory and Policy*, third edition, The MIT Press.

[2] La neutraldiad del dinero permite que el consumo esté determiando exclusivamente por variables reales.

## 3.6. Ejercicio

Defina el señoreaje como $S_t = \frac{i_{t-1}}{1+\pi_t} m_{t-1}$, el cual puede expresarse en el Estado Estacionario como $S = \frac{1}{\beta} \frac{i}{1+i} m$.

Considere el modelo de Saldos reales en la función de utilidad. En particular, considere la siguiente función de utilidad.

$$u(c, m) = \log(c - \kappa) + (m + \mu)^{1/2}, \; \kappa, \mu > 0$$

(I) Interprete el parámetro $\kappa$.

(II) Exprese la ecuación Saldos reales - Consumo en el Estado Estacionario del modelo de Saldos reales en la función de utilidad, considerando la forma funcional de la ecuación previa.

(III) Obtenga la demanda de dinero $m$ como función de $\frac{i}{1+i}$.

(IV) ¿Cuál es la política monetaria maximizadora de recursos?

# 4

# Tiempo de compras y restricciones reales de recursos

## 4.1. Introducción

En el modelo de Saldos reales en la función de utilidad, el dinero generaba utilidad de manera directa por el simple hecho de atesorarlo. Ahora, el dinero generará utilida de manera indirecta al facilitar las transacciones para obtener bienes de consumo.

Para mantener el enfoque utilizado en el modelo de Saldos reales en la función de utilidad, se considerarán modelos de equilibrio general en los que la demanda por saldos reales surge de su uso para llevar a cabo transacciones.

En estos modelos, recursos reales y dinero serán utilizados para generar servicios transaccionales, los cuales serán requeridos para comprar bienes de consumo. Estos recursos reales pueden tomar la forma de tiempo o bienes.

A continuación analizaremos el modelo de tiempo de compras (*shopping-time*). Al final de la nota, se discutirá brevemente sobre el modelo de costo de recursos reales (*real resource costs*).

## 4.2. Descripción de la economía

La compra de bienes requiere como insumo servicios transaccionales, los cuales serán función de los saldos reales $m_t$ y del tiempo destinado a ir de compras $s_t$. Es decir, ir de compras requiere que tengamos una cierta cantidad de dinero en la mano, así como de tiempo para realizar esta actividad.

La tecnología de los servicios transaccionales determinará cuánto tiempo será utilizado para ir de compras $s_t$ para ciertos niveles de consumo $c_t$ y atesoramiento de dinero $m_t$.

$$c_t = \psi(m_t, s_t)$$

$\psi$ es creciente y cóncava en ambos argumentos. En otras palabras, mientras más dinero tenemos en la mano, más podemos comprar (y consumir). Mientras más tiempo vayamos de compras, más podemos comprar (y consumir).

Ello genera un *trade-off*: ¿cómo asignar la unidad de tiempo entre ocio, trabajo y tiempo de compras?

Alternativamente, podemos escribir la ecuación previa en términos del tiempo requerido de compras para ciertos niveles de consumo y saldos reales.

$$s_t = g(c_t, m_t)$$

$g$ es creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo.

Las preferencias del consumidor representativo están dadas por

$$\sum_t \beta^t v(c_t, h_t)$$

Donde $h_t$ representa el ocio. La función de utilidad instantánea $v$ es creciente, cóncava y satisface las condiciones de Inada en ambos argumentos.El consumidor tiene una unidad de tiempo que la puede destinar al ocio $h_t$, a trabajar $l_t$ o a ir de compras $s_t$.

$$1 = h_t + l_t + s_t = h_t + l_t + g(c_t, m_t)$$

Así, las preferencias se pueden escribir como

$$\sum_t \beta^t v(c_t, 1 - l_t - g(c_t, m_t))$$

Este modelo da sustento al de Saldos en la función de utilidad, puesto que podemos considerar una función de utilidad instantánea del tipo $u(c_t, m_t, l_t) = v(c_t, 1 - l_t - g(c_t, m_t))$.

Para obtener saciedad de los saldos reales $m_t$ en este modelo, necesitamos que la función $g$ satisfaga

$$\forall c \ \exists \bar{m}_c \text{ st } \lim_{m \to \bar{m}_c} g_m = 0$$

Donde $g_m$ es la derivada de la función $g$ con respecto a $m$.

## 4.3. Definición del Equilibrio Competitivo

En rojo se destacan las diferencias respecto al modelo de Saldos reales en la función de utilidad.

Un Equilibrio Competitivo para esta economía es $\{c_t, k_t, l_t, M_t, B_t, P_t, i_t, w_t, q_t\}$ tal que:

1. Tomando como dado $\{P_t, i_t, w_t, q_t\}$; $\{c_t, k_t, l_t, m_t, b_t\}$ resuelve el problema del consumidor representativo.

$$\max \sum_t \beta^t v(c_t, 1 - l_t - g(c_t, m_t))$$

$$\text{s.t.}$$

$$c_t + k_t + m_t + b_t = w_t l_t + (q_t + (1-\delta))k_{t-1} + \tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + (1+i_{t-1})\tfrac{b_{t-1}}{1+\pi_t} + T_t$$

$$k_{-1}, m_{-1}, b_{-1} \text{ dados}$$

2. Tomando como dado $\{w_t, q_t\}$; $\{k_{t-1}, l_t\}$ resuelve el problema de la empresa

$$\max F(k_{t-1}, l_t) - w_t l_t - q_t k_{t-1}$$

3. El gobierno consolidado satisface su restricción de recursos y define su política monetaria.

$$\tfrac{M_t - M_{t-1}}{P_t} = T_t \ \forall t$$

$$M_t = (1+\theta)M_{t-1} \ \forall t$$

4. Los mercados se vacían

$$c_t + k_t = F(k_{t-1}, 1) + (1-\delta)k_{t-1} \ \forall t$$

$$B_t = 0 \ \forall t$$

## 4.4. Solución del Equilibrio Competitivo

El problema de la empresa es idéntico al visto en clase. Vamos a concentrarnos en las CPO del problema del consumidor.[1]

$$\begin{aligned}
c_t: &\quad v_{c_t} - v_{h_t} g_{c_t} = \lambda_t \\
l_t: &\quad v_{h_t} = \lambda_t w_t \\
k_t: &\quad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(q_{t+1} + (1-\delta)) \\
m_t: &\quad -v_{h_t} g_{m_t} = \lambda_t - \beta\lambda_{t+1}(\tfrac{1}{1+\pi_{t+1}}) \\
b_t: &\quad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(\tfrac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}})
\end{aligned}$$

Dividiendo la CPO de $m_t$ sobre $\lambda_t$

$$-w_t g_{m_t} = 1 - \beta\tfrac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\tfrac{1}{1+\pi_{t+1}} = \tfrac{i_t}{1+i_t}$$

El lado izquierdo representa el beneficio marginal de atesorar dinero.[2] Guardar una unidad de dinero reduce el tiempo de compras en $g_{m_t}$, lo cual permite utilizar ese tiempo para trabajar, siendo remunerado a la tasa $w_t$. El lado derecho se puede interpretar como el precio de los saldos reales en términos del bien de consumo.

[1]En el libro de Walsh, se resuelve de manera recursiva. Nosotros, por simplicidad, lo haremos de manera secuencial, es decir, mediante Lagrangeanos.

[2]Como los saldos reales $m_t$ influyen de manera negativa en la función $g$, entonces $g_{m_t} \leq 0$. Por ende, el lado izquierdo de la ecuación es no negativo.

## 4.5. Regla de Friedman

Como no hay costo social por producir dinero, y el costo privado de atesorar dinero es $\frac{i_t}{1+i_t}$. Entonces, para cerrar esa brecha se requiere $i_t = 0$. Se cumple la Regla de Friedman.

## 4.6. Planeador Social

Podemos formalizar el argumento anterior resolviendo el problema del Planeador Social.

$$\max \sum_t \beta^t v(c_t, 1 - l_t - g(c_t, m_t))$$
$$\text{s.t. } c_t + k_t = F(k_{t-1}, 1) + (1 - \delta)k_{t-1}$$

Mediante la CPO de $m_t$, obtenemos

$$-v_{h_t} g_{m_t} = 0$$

## 4.7. Costo Real de Recursos

En el modelo de tiempo de compras, atesorar dinero reduce los costos en términos de tiempo. En este modelo, vamos a considerar que el costo está en términos del bien de consumo. De esta manera, mientras mayor sea el volumen de bienes intercambiados, mayor será el costo transaccional. La función de costos transacciones está dada por

$$\Upsilon(c_t, m_t)$$

$\Upsilon$ es no negativa, creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo, convexa en ambos argumentos. Además, $\Upsilon(0, m_t) = 0$. Las preferencias del consumidor son

$$\sum_t \beta^t u(c_t, m_t, 1 - l_t)$$

Y su restricción presupuestal está dada por:

$$c_t + k_t + m_t + b_t = w_t l_t + (q_t + (1 - \delta))k_{t-1} + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + (1 + i_t)\frac{b_{t-1}}{1+\pi_t} + T_t - \Upsilon(c_t, m_t)$$

Como la función $\Upsilon$ representa un costo transaccional, la condición de factibilidad (o vaciado en el mercado de bienes) no será la habitual, sino que deberá incorporar este costo social.

$$c_t + k_t = F(k_{t-1}, l_t) + (1 - \delta)k_{t-1} - \Upsilon(c_t, m_t)$$

Análogamente, podemos definir el Equilibrio Competitivo, caracterizarlo, interpretarlo y compararlo con la solución del problema Planeador Social para hallar el valor óptimo de la tasa de interés nominal. Eso lo harán de tarea.

## 4.8. Referencias

(1) Walsh, C. (2010), *Monetary Theory and Policy*, third edition, The MIT Press.

## 4.9. Ejercicios

### I. Tiempo de compras con bonos de distinta maduración

Considere una economía poblada por un agente representativo cuyas preferencias están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t v(c_t, h_t)$$

Donde $c_t$ es el consumo y $h_t$ es el ocio. El consumidor cuenta con una unidad de tiempo, la cual puede destinar para trabajar $l_t$, tener ocio $h_t$ o ir de compras $s_t$.

$$1 = l_t + h_t + s_t$$

Si el consumidor desea comprar $c_t$ bienes y posee $m_t$ unidades monetarias, entonces el tiempo requerido $s_t$ está descrito por:

$$s_t = g(c_t, m_t)$$

El consumidor puede consumir, ahorrar o atesorar dinero. En esta economía existen bonos con distinta maduración. Defina $B_t^m$ como el bono comprado en el periodo $t$ que madura en $m$ periodos, es decir, en el periodo $t+m$. Asimismo, defina $(1+i_t^m)$ como el retorno que obtendrá en el periodo $t+m$ del bono $B_t^m$ comprado en el periodo $t$.

Los recursos del consumidor provienen del ingreso laboral $w_t l_t$, del retorno de los bonos y de una transferencia de suma fija $T_t$.

El objetivo de la empresa es maximizar el flujo descontado de beneficios. La empresa exhibe una tecnología con Rendimientos Constantes a Escala en el capital y trabajo.

$$y_t = F(k_{t-1}, l_t)$$

El gobierno consolidado financia la provisión de la transferencia de suma fija con emisión de dinero. La oferta monetaria crece a la tasa $\theta$. El gobierno mantiene un presupuesto balanceado en cada periodo.

(I) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(II) Resuelva el problema del consumidor.

(III) Resuelva el problema de la empresa.

(IV) Caracterice el Equilibrio Competitivo.

(V) En el Estado Estacionario, ¿es neutral al dinero este modelo?

(VI) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social.

(VII) Compare la solución del Equilibrio Competitivo y del Planeador Social y halle la tasa de interés de socialmente óptima. ¿Se cumple la Regla de Friedman?

## II. Tiempo de compras con precios nominales

Considere el modelo de Tiempo de compras visto en clase. Las preferencias del consumidor son:

$$\sum_t \beta^t v(c_t, h_t)$$

Donde $c_t$ es el consumo y $h_t$ es el ocio. El consumidor cuenta con una unidad de tiempo, la cual puede destinar para trabajar $l_t$, tener ocio $h_t$ o ir de compras $s_t$.

$$1 = l_t + h_t + s_t$$

Si el consumidor desea comprar $c_t$ bienes y posee $m_t$ unidades monetarias, entonces el tiempo requerido $s_t$ está descrito por:

$$s_t = g(c_t, m_t)$$

El consumidor puede consumir $c_t$, invertir en capital $x_t = k_t - (1-\delta)k_{t-1}$, atesorar dinero $m_t$ o ahorrar en bonos nominales $B_t$, los cuales generan un rendimiento nominal de $i_t$ el siguiente periodo.

El consumidor recibe el salario **nominal** $W_t$ y la renta de capital **nominal** $Q_t$. Además, del rendimiento del bono del periodo anterior, el atesoramiento del dinero del periodo anterior y la transferencia de suma fija del gobierno $T_t$.

La empresa maximiza los beneficios **nominales**, es decir, el valor de la producción menos el costo **nominal** del trabajo y del capital.

(I) Escriba el problema del consumidor y de la empresa.

(II) Defina el Equilibrio Competitivo.

(III) Resuelva el problema del consumidor y de la empresa.

(IV) Solo para este inciso. ¿Cómo se modificaría el problema del consumidor si la especificación de los bonos fuera distinta, es decir, que se tuviera que incurrir en un precio $v_t$ para obtener una unidad el periodo posterior?

(V) Solo para este inciso. ¿Cómo se modificaría el problema del consumidor y de la empresa si esta última fuera dueña del capital y no el consumidor?

(VI) Solo para este inciso. ¿Cómo se modificaría el problema del consumidor y la restricción del gobierno si este último implementara un retorno a los bonos de $i_t^m$?

## III. Costo reales de recursos

Considere el modelo de costos reales de recursos visto en clase. Las preferencias del consumidor son:

$$\sum_t \beta^t u(c_t, h_t)$$

Donde $c_t$ es el consumo y $h_t$ es el ocio. El consumidor cuenta con una unidad de tiempo, la cual puede ser destinada para trabajar $l_t$ o tener ocio $h_t$.

$$1 = l_t + h_t$$

Si el consumidor desea comprar $c_t$ bienes y posee $m_t$ unidades monetarias, entonces este incurrirá en un costo transaccional en términos de bienes de consumo de:

$$\Upsilon(c_t, m_t)$$

Suponga que la función $\Upsilon$ exhibe saciedad en los saldos reales.

(i) Escriba el problema del consumidor.

(ii) Defina el Equilibrio Competitivo.

(iii) Resuelva el problema del consumidor y de la empresa.

(iv) Combine la CPO del consumo con la de saldos reales, y utilice la CPO para de los bonos para deshacerse de las $\lambda$. ¿Cuál es el beneficio privado de mantener saldos reales? Interprete.

(v) Solo para este inciso. ¿Cómo se modificaría la restricción del gobierno y el vaciado de mercado si el gobierno realizara gasto público mediante la compra de una cantidad de bienes $g_t$, es decir, el gobierno emite dinero, realiza gasto público y ello lo satisface con transferencias de suma fija?

(vi) Plantee el problema del Planeador Social. ¿Cuál es la tasa de interés $i_t$ óptima?

# 5

# Efectivo por Adelantado

## 5.1. Introducción

En los modelos anteriores, el dinero generaba utilidad de forma directa o indirecta (reducción de costos de transacción) a los consumidores. Ahora, el dinero tendrá un rol distinto: se requerirá del dinero para realizar transacciones. Es decir, si el consumidor no cuenta con una cierta cantidad de efectivo, entonces no podrá realizar las compras de bienes.

Por ende, adicional a la restricción presupuestal del consumidor, este enfrentará una restricción de efectivo por adelantado (*cash in advance*): el valor de los bienes comprados no puede ser mayor a la cantidad de recursos que tiene en la mano en ese momento.

## 5.2. Descripción de la economía

No habrá incertidumbre. Considere un consumidor representativo con preferencias dadas por:

$$\textstyle\sum_t \beta^t u(c_t)$$

Por simplicidad, se omite la decisión ocio-trabajo. Lo relevante es notar que las preferencias no dependen del nivel de saldos reales, únicamente del consumo. La función de utilidad instantánea $u$ tiene las propiedades habituales.

Pensaremos que en cada periodo, las acciones que realiza el consumidor se llevan a cabo en distintos momentos del día.

1. En la mañana: Con el dinero que el consumidor guardó el periodo pasado $M_{t-1}$ y con la transferencia de suma fija que otorga el gobierno, el consumidor compra bienes.

2. En la tarde: El consumidor recibe ingresos por su trabajo y capital, recibe el rendimiento de los bonos y se queda con el remanente de las compras

de la mañana. Con esos recursos, invierte, ahorra y guarda una cantidad de dinero para comprar bienes el siguiente periodo.

Por consiguiente, podemos pensar que el consumidor enfrenta dos restricciones (la de la mañana y la de la tarde). La restricción de efectivo por adelantado (CIA), en términos nominales, es:

$$P_t c_t \leq M_{t-1} + P_t T_t$$

La restricción presupuestal del consumidor es:

$$k_t + m_t + b_t = w_t + (q_t + (1-\delta))k_{t-1} + (1 + i_{t-1})b_{t-1}\tfrac{1}{1+\pi_t} + [T_t + m_{t-1}\tfrac{1}{1+\pi_t} - c_t]$$

Reordenando términos, tenemos la restricción presupuestal habitual.

El comportamiento de la empresa, del gobierno y los vaciados de mercados son los habituales.

## 5.3. Definición del Equilibrio Competitivo

Un Equilibrio Competitivo para esta economía es $\{c_t, k_t, l_t, M_t, B_t, P_t, i_t, w_t, q_t\}$ tal que:

1. Tomando como dado $\{P_t, i_t, w_t, q_t\}$; $\{c_t, k_t, l_t, m_t, b_t\}$ resuelve el problema del consumidor representativo.

$$\max \textstyle\sum_t \beta^t u(c_t)$$

$$\text{s.t. } c_t + k_t + m_t + b_t = w_t + (q_t + (1-\delta))k_{t-1} + \tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + (1 + i_{t-1})\tfrac{b_{t-1}}{1+\pi_t} + T_t$$

$$c_t \leq \tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + T_t$$

$$k_{-1}, m_{-1}, b_{-1} \text{ dados}$$

2. Tomando como dado $\{w_t, q_t\}$; $\{k_{t-1}, l_t\}$ resuelve el problema de la empresa

$$\max F(k_{t-1}, l_t) - w_t l_t - q_t k_{t-1}$$

3. El gobierno consolidado satisface su restricción de recursos y define su política monetaria.

$$\tfrac{M_t - M_{t-1}}{P_t} = T_t \ \forall t$$

$$M_t = (1+\theta)M_{t-1} \ \forall t$$

4. Los mercados (trabajo, bienes y bonos) se vacían.

$$l_t = 1 \ \forall t$$

$$c_t + k_t = F(k_{t-1}, 1) + (1-\delta)k_{t-1} \ \forall t$$

$$B_t = 0 \ \forall t$$

## 5.4. Solución del Equilibrio Competitivo

El problema de la empresa es idéntico al estudiado previamente. El problema del consumidor cuenta con dos restricciones: la presupuestal que se cumple con igualdad y a la cual se le asociará el multiplicador $\beta^t\lambda_t$, y la de efectivo por adelantado la cual se cumple con desigualdad y a la cual se le asociará el multiplicador $\beta^t\mu_t$.[1] Como la segunda restricción se cumple con desigualdad debemos tener en cuenta las condiciones de holgura.

Obteniendo las CPO del problema del consumidor:

$$c_t : \quad u_{c_t} = \lambda_t + \mu_t$$

$$k_t : \quad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(q_{t+1} + (1-\delta))$$

$$m_t : \quad -\lambda_t + \beta\tfrac{\lambda_{t+1}}{1+\pi_{t+1}} + \beta\tfrac{\mu_{t+1}}{1+\pi_{t+1}} = 0$$

$$b_t : \quad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(1+i_t)\tfrac{1}{1+\pi_{t+1}}$$

Y las Condiciones de Holgura (CH):

$$\mu_t \geq 0$$

$$c_t \leq \tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + T_t$$

$$\mu_t[c_t - \tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} - T_t] = 0$$

De la CPO de $b_t$ y $m_t$:

$$1 + i_t = \tfrac{1}{\beta}\tfrac{1}{\lambda_{t+1}}(1+\pi_{t+1})\lambda_t =$$

$$\tfrac{1}{\beta}\tfrac{1}{\lambda_{t+1}}(1+\pi_{t+1})\beta(\tfrac{\lambda_{t+1}+\mu_{t+1}}{1+\pi_{t+1}}) =$$

$$1 + \tfrac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}} \Longrightarrow$$

$$i_t = \tfrac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}}$$

Por tanto, $i_t > 0$ si y solo si $\mu_{t+1} > 0$. Lo anterior implica que la restricción de *cash in advance* (CIA) se cumple con igualdad.

La intuición de este resultado es la siguiente: Dado que no existe incretidumbre en el modelo, si existe un costo de oportunidad de atesorar dinero ($i_t > 0$), entonces el consumidor solamente dejará la cantidad exacta de dinero para realizar las compras del periodo posterior. Por ello, la restricción CIA se cumplirá con igualdad. Con incertidumbre, lo anterior no necesariamente es cierto.

[1] El multiplicador $\lambda_t$ puede interpretarse como el precio sombra de la riqueza, y $\mu_t$ como el precio sombra de los servicios transaccionales.

## 5.5. Estado Estacionario

En el Estado Estacionario, $m_t = \frac{M_t}{P_t}$ es constante en el tiempo, lo que implica que $\pi_t = \theta$.

Con la CPO del capital, podemos hallar el valor de $k_t$ en el Estado Estacionario.

$$\frac{1}{\beta} = F_k + (1 - \delta)$$

Con la condición de factibilidad podemos hallar el valor de $c_t$ en el Estado Estacionario.

$$c + \delta k = F(k, 1)$$

En el Estado Estacionario, se cumple la neutralidad del dinero, porque los valores del consumo y del capital no dependen de ninguna variable nominal.

## 5.6. Costo social de la inflación

Podemos plantear el problema del Planeador Social para hallar el nivel óptimo de inflación.

$$\max \sum_t \beta^t u(c_t)$$
$$\text{s.t. } c_t + k_t = F(k_{t-1}, 1) + (1 - \delta)k_{t-1}$$

Calculando las CPO de este problema, podemos manipularlas para obtener la Ecuación de Euler

$$\frac{1}{\beta} = F_{k_t} + (1 - \delta)$$

y la de Factibilidad. En el Estado Estacionario, ambas ecuaciones son idénticas a las de la solución de mercado. Por tanto, en este modelo, no existe una tasa de inflación óptima que maximice el bienestar del consumidor en el Estado Estacionario.

Recordemos que en los modelos previos, teníamos una condición del tipo $u_{m_t} = 0$, que nos permitía hallar una política monetaria óptima. Aquí no existe una condición análoga, por ello se obtiene el resultado descrito en el párrafo anterior.

No obstante, este resultado no es robusto. Es susceptible a distintas especificaciones de las preferencias del consumidor. Por ejemplo, podemos considerar la decisión ocio-trabajo o considerar un bien adicional, el cual no esté sujeto a la restricción de CIA. En ambos casos, la ecuación ocio-consumo o la tasa marginal de sustitución entre ambos bienes estaría relacionada con la tasa de interés $i_t$. Lo anterior nos permitirá hallar una política monetaria óptima al comparar la solución del mercado con la del Planeador Social.

## 5.7. Ejercicios

### I. Efectivo por adelantado con bienes de crédito

Considere el modelo de efectivo por adelantado. Las preferencias del consumidor representativo están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, d_t)$$

Donde $c_t$ es un bien de consumo, el cual está sujeto a la restricción de efectivo por adelantado, y $d_t$ es otro bien de consumo, el cual puede ser comprado una vez que el consumidor recibió sus demás ingresos, en la tarde. La temporalidad del problema es la siguiente:

1. En la mañana, con el dinero que guardó el periodo anterior $M_{t-1}$ y con la transferencia nominal del periodo contemporáneo $P_tT_t$, el consumidor elige su nivel nominal de consumo $P_tc_t$.

2. En la tarde, con el remanente de las compras de la mañana, el ingreso laboral $w_t$ y de capital $q_tk_{t-1}$ y el retorno nominal del bono $(1+i_{t-1})B_{t-1}$; el consumidor invierte en capital, ahorra, guarda dinero para el próximo periodo y compra el bien $d_t$.

La empresa cuenta con una tecnología $F(k_{t-1}, l_t)$ que exhibe rendimientos constantes a escala. La empresa incurre en costos laborales y de capital y percibe los ingresos por concepto de la venta de ambos bienes $y_t^c$ y $y_t^d$.

$$\max\ y_t^c + y_t^d - w_tl_t - q_tk_{t-1}$$
$$\text{s.t. } y_t^c + y_t^d = F(k_{t-1}, l_t)$$

El gobierno financia la emisión de dinero con una transferencia de suma fija $T_t$. En términos del vaciado de mercado, la producción se utiliza como inversión en capital o como consumo de ambos bienes.[2]

(I) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(II) Resuelva el problema de la empresa.

(III) Resuelva el problema del consumidor.

(IV) ¿Cuándo se satisface con igualdad la restricción de efectivo por adelantado?

(V) Obtenga la Tasa Marginal de Sustitución entre ambos bienes. Argumente que la tasa de interés actúa como un impuesto al consumo del bien $c_t$.

(VI) En el Estado Estacionario, ¿es neutral al dinero este modelo?

[2]Basado en el ejercicio 6 del Walsh.

(vii) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social.

(viii) Compare la Tasa Marginal de Sustitución del bien $c_t$ y $d_t$ de ambos problemas y halle la tasa de interés óptima. Interprete. ¿Cómo se relaciona este resultado con el inciso (v)?

## II. Efectivo por adelantado con decisión ocio-trabajo y relajación en la restricción de efectivo por adelantado

Considere el modelo de efectivo por adelantado. Las preferencias del consumidor representativo están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, 1 - l_t)$$

Donde $c_t$ es el bien de consumo y $l_t$ es tiempo dedicado a trabajar. Es decir, hay una decisión de ocio-trabajo.

A diferencia del modelo visto en clase, en que todo el consumo debía ser realizado con efectivo. En esta economía, solamente se requiere que una proporción $\psi \in [0, 1]$ del valor del consumo se realice en efectivo. Lo anterior modificará las restricciones que enfrenta el consumidor. La temporalidad del problema es la siguiente:

1. En la mañana, con el dinero que guardó el periodo anterior $M_{t-1}$ y con la transferencia nominal del periodo contemporáneo $P_tT_t$, el consumidor elige su nivel de consumo, considerando que solo una proporción $\psi$ debe ser cubierta con efectivo.

2. En la tarde, con el remanente de las compras de la mañana, el ingreso laboral y de capital y el retorno del bono; el consumidor invierte en capital, ahorra, guarda dinero para el próximo periodo y paga la parte restante del consumo.

La empresa cuenta con una tecnología $F(k_{t-1}, l_t)$ que exhibe rendimientos constantes a escala. El gobierno financia la emisión de dinero con una transferencia de suma fija $T_t$.

(i) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(ii) Solo para este inciso. ¿Cómo se modificaría la definición del Equilibrio Competitivo si en la mañana, antes de consumir, el individuo recibe, adicionalmente a la transferencia del gobierno, el retorno nominal del bono del periodo anterior $(1 + i_{t-1})B_{t-1}$?

(iii) Resuelva el problema del consumidor.

(iv) Si $\psi$ fuera una variable de decisión del consumidor, ¿qué valor tomaría? (No derives, piensa. Es más, ¿por qué sería mala idea obtener una CPO respecto a $\psi$ en este modelo?)

(v) ¿Cuándo se satisface con igualdad la restricción de efectivo por adelantado? Interprete.

En los incisos posteriores suponga $\psi = 1$.

(vi) Calcule la condición Ocio - Consumo. ¿Qué interpretación podría darle a la tasa de interés $i_t$?

(vii) En el Estado Estacionario, ¿es neutral al dinero este modelo?

(viii) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social.

(ix) Compare la condición Ocio - Consumo de la solución de mercado y del Planeador Social y halle la tasa de interés óptima. Interprete. Relacione con el inciso (vi).

## III. Efectivo por adelantado con precio de los bonos

(Examen parcial verano 2017) Considere el modelo de efectivo por adelantado con decisión ocio - trabajo. Las preferencias del consumidor representativo están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, 1 - l_t)$$

Donde $c_t$ es el bien de consumo y $l_t$ es tiempo dedicado a trabajar. En esta economía, el consumidor recibe una proporción $\gamma \in [0, 1]$ de su ingreso laboral $w_t l_t$ en la mañana, el restante en la tarde.

Adicionalmente, el mercado de bonos se encuentra expresado en términos de un precio $v_t$, en lugar de una tasa de interés $(1 + i_t)$. Es decir, si el consumidor desea recibir una unidad nominal el periodo posterior, entonces en el periodo corriente tiene incurrir en un costo $v_t$ por la compra de dicho bono. La temporalidad del problema es la siguiente:

1. En la mañana, con el dinero que guardó el periodo anterior, con la transferencia nominal del periodo contemporáneo y con una proporción $\gamma$ de su ingreso laboral, el consumidor elige su nivel de consumo.

2. En la tarde, con el remanente de las compras de la mañana, el restante de su ingreso laboral, la renta de capital y el retorno del bono; el consumidor invierte en capital, ahorra y guarda dinero para el próximo periodo.

La empresa cuenta con una tecnología $F(k_{t-1}, l_t)$ que exhibe rendimientos constantes a escala. El objetivo de la empresa es maximizar beneficios, considerando los costos laborales y la renta de capital.

El gobierno realiza una transferencia de suma fija $T_t$ al consumidor y lo financia con la emisión de dinero. El gobierno no tiene acceso al mercado financiero. La oferta nominal de dinero crece a una tasa $\theta$ en cada periodo.

(i) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía. Sea lo más explícito posible.

(ii) Resuelva el problema de la empresa y obtenga las CPO y CH del problema del consumidor.

(iii) Solo para este inciso. Si $\gamma$ fuera una variable de decisión del consumidor, ¿qué valor tomaría? Argumente su respuesta.

(iv) ¿Cuándo se satisface con igualdad la restricción de efectivo por adelantado? Interprete.

(v) Calcule la condición de Ocio - Consumo, en dicha condición no deben aparecer los multiplicadores de Lagrange. Interprete. (Si tiene problemas para el caso general, puede asumir que $\gamma = 0$. No obstante, ello solo le dará crédito parcial).

(vi) En el Estado Estacionario, ¿es neutral al dinero este modelo? Argumente.

(vii) Plantee y obtenga las CPO del problema del Planeador Social.

(viii) Solo para este inciso suponga $\gamma = 0$. Compare la condición Ocio - Consumo de la solución de mercado con la del Planeador Social y halle la política monetaria óptima. Interprete.

(ix) Solo para este inciso suponga $\gamma = 1$. Compare la condición Ocio - Consumo de la solución de mercado con la del Planeador Social y halle la política monetaria óptima. Interprete.

## IV. Efectivo por adelantado con bienes de efectivo y crédito e impuestos distorsionantes

Considere el modelo de efectivo por adelantado. Las preferencias del consumidor representativo están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, d_t)$$

Donde $c_t$ es un bien de consumo, el cual está sujeto a la restricción de efectivo por adelantado, y $d_t$ es otro bien de consumo, el cual puede ser comprado una vez que el consumidor recibió sus demás ingresos, en la tarde. El bien de crédito $d_t$ se encuentra gravado a una tasa $\tau_t$. La temporalidad del problema es la siguiente:

1. En la mañana, con el dinero que guardó el periodo anterior $M_{t-1}$ y con la transferencia nominal del periodo contemporáneo $P_tT_t$, el consumidor elige su nivel nominal de consumo $P_tc_t$.

2. En la tarde, con el remanente de las compras de la mañana, los beneficios de la empresa, el ingreso laboral $w_t$ y de capital $q_tk_{t-1}$ y el retorno nominal del bono $(1+i_{t-1})B_{t-1}$; el consumidor invierte en capital, ahorra, guarda dinero para el próximo periodo y compra el bien $d_t$, el cual cuenta con un impuesto $\tau_t$.

La empresa cuenta con una tecnología $F(k_{t-1}, l_t)$ que exhibe rendimientos decrecientes a escala. La empresa incurre en costos laborales y de capital y percibe los ingresos por concepto de la venta de ambos bienes $y_t^c$ y $y_t^d$.

$$\begin{aligned} \max\ & y_t^c + y_t^d - w_t l_t - q_t k_{t-1} \\ \text{s.t. } & y_t^c + y_t^d = F(k_{t-1}, l_t) \end{aligned}$$

El gobierno financia la emisión de dinero y la recaudación del impuesto con una transferencia de suma fija $T_t$. En términos del vaciado de mercado, la producción se utiliza como inversión en capital o como consumo de ambos bienes.

(I) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(II) Resuelva el problema de la empresa.

(III) Resuelva el problema del consumidor.

(IV) ¿Cuándo se satisface con igualdad la restricción de efectivo por adelantado?

(V) Obtenga la Tasa Marginal de Sustitución entre ambos bienes.

(VI) En el Estado Estacionario, ¿es neutral al dinero este modelo?

(VII) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social.

(VIII) Compare la Tasa Marginal de Sustitución del bien $c_t$ y $d_t$ de ambos problemas y halle la política monetaria/fiscal óptima. Interprete.

## V. Efectivo por adelantado con subsidio distorsionante y eficiencia en el mercado laboral

Considere el modelo de efectivo por adelantado. Las preferencias del consumidor representativo están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, 1 - l_t)$$

Donde $c_t$ es el bien de consumo y $l_t$ es tiempo dedicado a trabajar. Es decir, hay una decisión de ocio-trabajo. El bien de consumo $c_t$ cuenta un subsidio a la tasa $\chi_t$. La temporalidad del problema es la siguiente:

1. En la mañana, con el dinero que guardó el periodo anterior $M_{t-1}$ y con la transferencia nominal del periodo contemporáneo $P_t T_t$, el consumidor elige su nivel de consumo, considerando que este cuenta con un subsidio a la tasa $\chi_t$.
2. En la tarde, con el remanente de las compras de la mañana, el ingreso laboral y de capital y el retorno del bono; el consumidor invierte en capital, ahorra, guarda dinero para el próximo periodo y paga la parte restante del consumo.

La empresa cuenta con una tecnología $F(k_{t-1}, n_t)$ que exhibe rendimientos constantes a escala en el capital $k_{t-1}$ y en la eficiencia de trabajo $n_t$. Por cada hora trabajada, el hogar genera $\phi_t$ unidades de eficiencia, las cuales son remuneradas al salario $w_t$. El gobierno utiliza la emisión de dinero para financiar transferencia de suma fija $T_t$ y el subsidio al bien de efectivo $c_t$.

(i) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(ii) Resuelva el problema de la empresa.

(iii) Resuelva el problema del consumidor.

(iv) ¿Cuándo se satisface con igualdad la restricción de efectivo por adelantado?

(v) Obtenga la condición Ocio - Consumo.

(vi) En el Estado Estacionario, ¿es neutral al dinero este modelo?

(vii) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social.

(viii) Compare la condición Ocio - Consumo de ambos problemas y halle la política monetaria/fiscal óptima. Interprete.

# 6

# Problema de Asignación de Ramsey

## 6.1. Introducción

Anteriormente, se consideró que el gobierno puede acceder a recursos de suma fija para balancear su restricción de recursos. Adicionalmente, se consideraba que este no realizaba gasto alguno. Ambos supuestos son irreales.

De esta manera, para realizar una secuencia de gasto exógenamente determinada, el gobierno (consolidado) contará con dos medidas para balancear su restricción de recursos: impuesto inflacionario o impuestos distorsionantes (e.g., impuesto al consumo, al ingreso laboral o al retorno del capital).

El impuesto al consumo, por ejemplo, abre una brecha entre el precio que paga el consumidor y el que recibe el productor, generando una distorisión adicional en la economía. Simétrico argumento para los demás impuestos.[1]

La pregunta a resolver con el Problema de Asignación de Ramsey es la siguiente: si el gobierno puede financiar su secuencia de gasto a través de emisión de dinero y a través de un impuesto al ingreso laboral. Entonces, ¿cómo determinar el impuesto inflacionario y el impuesto al ingreso laboral para minimizar las distorsiones en la economía?

Debe ser claro que ambas distorsiones no pueden ser simultáneamente cero, es decir, no se puede implementar la Regla de Friedman (reducciones en la base monetaria) y nulo impuesto al laboral, porque entonces no habrían recursos para financiar las acciones gubernamentales.

[1]En el desarrollo del modelo, se supondrá que el gobierno no puede gravar el retorno del capital inicial $k_{-1}$, puesto que este se podría considerar como un impuesto de suma fija, debido a que el consumidor no puede decidir sobre este, está dado al comenzar la economía. Adicionalmente, se considerará que el gobierno se compromete a la secuencia tributaria definida en el primer periodo; de no imponer esta restricción, habría un problema de inconsistencia en el tiempo en el actuar del gobierno, puesto que en cada periodo cambiaría su política tributaria para gravar el capital inicial, dado su carácter de insumo fijo.

Por consiguiente, la solución de mercado no podrá igualar a la del Planeador Social, sino que la economía accederá a un *second-best*, puesto que la mejor solución posible no es alcanzable.

En este sentido, el Problema de Asignación de Ramsey busca la combinación óptima de impuestos que maximice el bienestar del consumidor sujeto a que la economía se encuentra en un Equilibrio Competitivo, a que el gobierno no tiene acceso a impuestos de suma fija y a que debe satisfacer una secuencia de gasto exógenamente determinada.[2]

## 6.2. Descripción de la economía

Se considerará una economía monetaria introducida por el modelo de *cash in advance*. Por simplicidad, se prescindirá del capital. Las preferencias del consumidor representativo están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, d_t, l_t, g_t)$$

Donde $c_t$ es un bien de consumo, el cual está sujeto a la restricción de efectivo por adelantado; $d_t$ es otro bien de consumo, el cual puede ser comprado una vez que el consumidor recibió sus demás ingresos, en la tarde; $l_t$ es el tiempo destinado a trabajar; $g_t$ son los bienes provistos por el gobierno.[3] La temporalidad del problema es la siguiente:

1. En la mañana, con el dinero que guardó el periodo anterior $M_{t-1}$, el consumidor elige su nivel nominal de consumo $P_t c_t$.
2. En la tarde, con el remanente de las compras de la mañana, el ingreso laboral neto de impuestos $(1-\tau_t)w_t l_t$ y el retorno nominal del bono $(1+i_{t-1})B_{t-1}$; el consumidor ahorra, guarda dinero para el próximo periodo y compra el bien $d_t$.

La empresa cuenta con una tecnología $F(l_t) = A_t l_t$ que exhibe rendimientos constante a escala. La empresa incurre en costos laborales y percibe los ingresos por concepto de la venta de ambos bienes $y_t^c$ y $y_t^d$.

$$\max\ y_t^c + y_t^d - w_t l_t$$
$$\text{s.t. } y_t^c + y_t^d = A_t l_t$$

El gobierno financia la compra de bienes con emisión de dinero y con recaudación del impuesto al ingreso laboral. Adicionalmente, el gobierno tiene acceso a los mercados de crédito. En términos del vaciado de mercado, la producción se utiliza como gasto gubernamental o como consumo de ambos bienes.

[2]Alternativamente, podría pensarse en este problema como un juego, en el que primeramente el gobierno determina impuestos y crecimiento de la oferta monetaria, y posteriormente los agentes (consumidor y empresa) maximizan utilidad y beneficios. Por consiguiente, habrá que resolverse por inducción hacia atrás. Es decir, primeramente se resuelve el Equilibrio Competitivo y, posteriormente, se hallarán los impuestos óptimos.

[3]El que el gobierno provea un bien o servicio no implica que este sea un bien o servicio público.

## 6.3. Procedimiento para resolver el problema

Para resolver el Problema de Asignación de Ramsey se utilizará el enfoque primal (*primal approach*) de Sargent y Ljungqvist:

1. Resolver el problema del consumidor y de la empresa, y obtener las condiciones de eficiencia.
2. Expresar impuestos y precios en función de las cantidades.
3. Incorporar dichas expresiones en la restricción presupuestal e iterar para obtener una restricción intertemporal. A esta nueva restricción se le conocerá como restricción de implementabilidad.
4. Escoger las secuencias de cantidades que maximizan la utilidad del consumidor sujeto a la restricción de implementabilidad y factibilidad.
5. Encontrar los impuestos óptimos que permiten implementar estas cantidades, es decir, recuperar los impuestos utilizando las expresiones del punto 2.

## 6.4. Definición del Equilibrio Competitivo

Un Equilibrio Competitivo para esta economía es $\{c_t, d_t, l_t, B_t, M_t, P_t, w_t, i_t\}$ tal que:

1. Tomando como dado $\{P_t, w_t, i_t\}$; $\{c_t, d_t, l_t, b_t, m_t\}$ resuelve el problema del consumidor representativo.

$$\begin{gathered} \max \textstyle\sum_t \beta^t u(c_t, d_t, l_t, g_t) \\ \text{s.t. } c_t + d_t + m_t + b_t = (1-\tau_t) w_t l_t + \tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + (1+i_{t-1}) \tfrac{b_{t-1}}{1+\pi_t} \\ c_t \leq \tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} \\ m_{-1}, b_{-1} \text{ dados} \end{gathered}$$

2. Tomando como dado $\{w_t\}$; $\{l_t\}$ resuelve el problema de la empresa representativa.

$$\begin{gathered} \max\ y_t^c + y_t^d - w_t l_t \\ \text{s.t. } y_t^c + y_t^d = A_t l_t \end{gathered}$$

3. El gobierno satisface su restricción de recursos y determina una política fiscal/monetaria.

$$g_t + b_t^g = \tfrac{M_t - M_{t-1}}{P_t} + \tau_t w_t l_t + (1+i_{t-1}) \tfrac{b_{t-1}^g}{1+\pi_t}\ \forall t$$

4. Los mercados (bonos y bienes) se vacían.

$$\begin{gathered} b_t + b_t^g = 0\ \forall t \\ c_t + d_t + g_t = A_t l_t\ \forall t \end{gathered}$$

## 6.5. Resolver problema del consumidor

Se obtienen las CPO del problema del consumidor.

$$\begin{aligned} c_t: &\quad u_{c_t} = \lambda_t + \mu_t \\ d_t: &\quad u_{d_t} = \lambda_t \\ l_t: &\quad -u_{l_t} = \lambda_t(1-\tau_t)w_t \\ m_t: &\quad \lambda_t = \tfrac{\beta}{1+\pi_{t+1}}(\lambda_{t+1}+\mu_{t+1}) \\ b_t: &\quad \lambda_t = \tfrac{\beta}{1+\pi_{t+1}}\lambda_{t+1}(1+i_t) \end{aligned}$$

Tales ecuaciones se pueden manipular para expresar precios e impuestos en términos de cantidades.

Combinando las CPO de $l_t$ y $d_t$.

$$(1-\tau_t)w_t = (1-\tau_t)A_t = -\tfrac{u_{l_t}}{u_{d_t}}$$

Combinando las CPO de $m_t$, $c_t$ y $d_t$.

$$(1+\pi_{t+1}) = \beta\tfrac{u_{c_{t+1}}}{u_{d_t}}$$

Combinando las CPO de $b_t$ y $d_t$.

$$\tfrac{(1+\pi_{t+1})}{(1+i_t)} = \beta\tfrac{u_{d_{t+1}}}{u_{d_t}}$$

Del par de ecuaciones previas.

$$(1+i_t) = \tfrac{u_{c_{t+1}}}{u_{d_{t+1}}}$$

## 6.6. Incorporar precios e impuestos en la restricción presupuestal

Escribir la restricción del periodo $t$, definiendo $a_t := m_t + b_t$

$$\begin{aligned} c_t + d_t + m_t + b_t &= (1-\tau_t)w_t l_t + \tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + (1+i_{t-1})\tfrac{b_{t-1}}{1+\pi_t} \\ c_t + d_t + a_t &= (1-\tau_t)w_t l_t - i_{t-1}\tfrac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + (1+i_{t-1})\tfrac{a_{t-1}}{1+\pi_t} \end{aligned}$$

Suponga que se cumple con igualdad la restricción de *cash in advance*:[4] $c_t = \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t}$. Incorporando ello en la restricción presupuestal se obtiene.

$$\begin{aligned} c_t + d_t + a_t &= (1-\tau_t)w_t l_t - i_{t-1}c_t + (1+i_{t-1})\tfrac{a_{t-1}}{1+\pi_t} \\ (1+i_{t-1})c_t + d_t + a_t &= (1-\tau_t)w_t l_t + (1+i_{t-1})\tfrac{a_{t-1}}{1+\pi_t} \end{aligned}$$

[4]Ello sucede necesariamente cuando la tasa de interés nominal es estrictamente positiva.

Multiplicando por $\frac{1+\pi_t}{1+i_{t-1}}$.

$$(1+\pi_t)c_t + \tfrac{1+\pi_t}{1+i_{t-1}}d_t + \tfrac{1+\pi_t}{1+i_{t-1}}a_t = \tfrac{1+\pi_t}{1+i_{t-1}}(1-\tau_t)w_t l_t + a_{t-1}$$

Incorporando las expresiones para los precios e impuestos en la ecuación previa.

$$\beta\tfrac{u_{c_t}}{u_{d_{t-1}}}c_t + \beta\tfrac{u_{d_t}}{u_{d_{t-1}}}d_t + \beta\tfrac{u_{d_t}}{u_{d_{t-1}}}a_t = \beta\tfrac{u_{d_t}}{u_{d_{t-1}}}(-\tfrac{u_{l_t}}{u_{d_t}})l_t + a_{t-1}$$

Ahora bien, incorporando la ecuacion del periodo $t = 0$ en la del periodo $t = 1$.

$$\tfrac{u_{c_0}}{u_{d_0}}c_0 + \beta\tfrac{u_{c_1}}{u_{d_0}}c_1 + d_0 + \beta\tfrac{u_{d_1}}{u_{d_0}}d_1 + \beta\tfrac{u_{d_1}}{u_{d_0}}a_1 = -\tfrac{u_{l_0}}{u_{d_0}}l_0 - \beta\tfrac{u_{l_1}}{u_{d_0}}l_1 + \tfrac{m_{-1}}{1+\pi_0} + (1+i_{-1})\tfrac{b_{-1}}{1+\pi_0}$$

Defina a los últimos dos términos como $\Phi_{-1}$, el cual solo depende de términos del periodo $t = -1$.

$$\Phi_{-1} := \tfrac{m_{-1}}{1+\pi_0} + (1+i_{-1})\tfrac{b_{-1}}{1+\pi_0}$$

Por lo que la restricción presupuestal se puede reescribir como

$$\tfrac{u_{c_0}}{u_{d_0}}c_0 + \beta\tfrac{u_{c_1}}{u_{d_0}}c_1 + d_0 + \beta\tfrac{u_{d_1}}{u_{d_0}}d_1 + \beta\tfrac{u_{d_1}}{u_{d_0}}a_1 = -\tfrac{u_{l_0}}{u_{d_0}}l_0 - \beta\tfrac{u_{l_1}}{u_{d_0}}l_1 + \Phi_{-1}$$

Continuando con la iteración y reordenando términos

$$\textstyle\sum_t \beta^t[(\tfrac{u_{c_t}}{u_{d_0}})c_t + (\tfrac{u_{d_t}}{u_{d_0}})d_t + (\tfrac{u_{l_t}}{u_{d_0}})l_t] + \lim_{t\to\infty}\beta^t(\tfrac{u_{d_t}}{u_{d_0}})a_t = \Phi_{-1}$$

Utilizando la condición de transversalidad.

$$\textstyle\sum_t \beta^t[u_{c_t}c_t + u_{d_t}d_t + u_{l_t}l_t] = u_{d_0}\Phi_{-1}$$

A la ecuación anterior se le denomina como condición de implementabilidad. La condición de implementabilidad resume o sintetiza el Equilibrio Competitivo en una sola ecuación.

## 6.7. Problema de Asignación de Ramsey

El Problema de Asignación de Ramsey consiste en hallar $\{c_t, d_t, l_t\}$ tales que resuelvan:

$$\max \textstyle\sum_t \beta^t u(c_t, d_t, l_t, g_t)$$
$$\text{s.t. } \textstyle\sum_t \beta^t[u_{c_t}c_t + u_{d_t}d_t + u_{l_t}l_t] = u_{d_0}\Phi_{-1}$$
$$c_t + d_t + g_t = A_t l_t$$

Por simplicidad, se supondrá que la función de utilidad instantánea $u$ es (i) aditivamente separable en el trabajo $l_t$ y (ii) homotética en el bien de efectivo $c_t$ y en el de crédito $d_t$.[5]

Considere el Lagrangeano del problema, donde el multiplicador $\nu$ se asocia a la primera restricción (implementabilidad)[6] y el multiplicador $\beta^t\gamma_t$ a la segunda (factibilidad).

De tal suerte, se obtienen las CPO para periodos $t \geq 1$, porque las del periodo $t = 0$ son más complicadas, debido a que involucran el término de la derecha de la condición de implementabilidad.

$$\begin{aligned} c_t: &\quad u_{c_t} - \nu[u_{c_t} + u_{cc_t}c_t + u_{dc_t}d_t] = \gamma_t \\ d_t: &\quad u_{d_t} - \nu[u_{cd_t}c_t + u_{d_t} + u_{dd_t}d_t] = \gamma_t \\ l_t: &\quad u_{l_t} - \nu[u_{l_t} + u_{ll_t}l_t] = -\gamma_t A_t \end{aligned}$$

Reescribiendo las CPO previas.

$$u_{c_t}[1 - \nu(1 + \tfrac{c_t u_{cc_t} + d_t u_{cd_t}}{u_{c_t}})] = \gamma_t$$

$$u_{d_t}[1 - \nu(1 + \tfrac{d_t u_{dd_t} + c_t u_{dc_t}}{u_{d_t}})] = \gamma_t$$

$$-u_{l_t}[1 - \nu(1 + \tfrac{l_t u_{ll_t}}{u_{l_t}})] = \gamma_t A_t$$

Arreglando términos.

$$\frac{u_{c_t}}{u_{d_t}} = \frac{[1-\nu(1+\frac{d_t u_{dd_t}+c_t u_{dc_t}}{u_{d_t}})]}{[1-\nu(1+\frac{c_t u_{cc_t}+d_t u_{cd_t}}{u_{c_t}})]}$$

$$-\frac{u_{l_t}}{u_{d_t}} = A_t \frac{[1-\nu(1+\frac{d_t u_{dd_t}+c_t u_{dc_t}}{u_{d_t}})]}{[1-\nu(1+\frac{l_t u_{ll_t}}{u_{l_t}})]}$$

Como la función de utilidad instantánea es homotética en $c_t$ y $d_t$, se cumple la siguiente propiedad.

$$\frac{c_t u_{cc_t}+d_t u_{cd_t}}{u_{c_t}} = \frac{d_t u_{dd_t}+c_t u_{dc_t}}{u_{d_t}}$$

Insertando esta condición en la ecuación previa.

$$\frac{u_{c_t}}{u_{d_t}} = 1$$

$$-\frac{u_{l_t}}{u_{d_t}} = A_t \frac{[1-\nu(1+\frac{d_t u_{dd_t}+c_t u_{dc_t}}{u_{d_t}})]}{[1-\nu(1+\frac{l_t u_{ll_t}}{u_{l_t}})]}$$

[5] Una función $u(x, y)$ es homotética cuando la tasa marginal de sustitución entre $x$ y $y$ es constante a lo largo de rayos que parten del origen.

[6] El multiplicador es $\nu$ y no $\nu_t$, porque solamente es una restricción, a diferencia de la de factibilidad, que existe una para cada periodo $t$.

## 6.8. Recuperar impuestos óptimos

Al comparar la solución del Problema de Asignación de Ramsey con la solución del Equilibrio Competitivo, se puede recuperar la tasa de interés nominal y la tasa de impuesto al trabajo, implementables en un escenario del *second-best*.

$$(1+i_{t-1}) = \frac{u_{c_t}}{u_{d_t}} = 1$$

$$(1-\tau_t)A_t = -\frac{u_{l_t}}{u_{d_t}} = A_t \frac{[1-\nu(1+\frac{d_t u_{dd_t} + c_t u_{dc_t}}{u_{d_t}})]}{[1-\nu(1+\frac{l_t u_{ll_t}}{u_{l_t}})]}$$

Consecuentemente, bajo funciones de utilidad instantánea aditivamente separables en el trabajo y homotéticas en el consumo de ambos bienes, se mantiene la Regla de Friedman ($i_t = 0$). Por lo que se desprende que el impuesto al ingreso laboral genera menores distorsiones que el impuesto inflacionario.

Para caracterizar el impuesto al trabajo de manera más detallada, se puede considerar un supuesto adicional: (iii) proponer que la función de utilidad instantánea exhibe Aversión Constante Relativa al Riesgo en el trabajo y en el consumo de ambos bienes y que sea aditivamente separable en todos sus argumentos. Un ejemplo es el siguiente:

$$u(c,d,l,g) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{d^{1-\phi}}{1-\phi} - \frac{l^{1+\varphi}}{1+\varphi} + v(g), \quad \sigma, \phi, \varphi > 0$$

Donde $v$ es una función creciente. Nota que para tener homoteticidad, se debe imponer que $\sigma = \phi$. En dicho caso, la solución del Problema de Asignación de Ramsey se puede reescribir así.

$$(1+i_{t-1}) = \frac{u_{c_t}}{u_{d_t}} = 1$$

$$(1-\tau_t)A_t = -\frac{u_{l_t}}{u_{d_t}} = A_t \frac{[1-\nu(1-\phi)]}{[1-\nu(1+\varphi)]}$$

Lo que implica que el impuesto al trabajo debe ser constante en el tiempo, bajo esta especificación. La política fiscal y monetaria óptima señala que el gobierno suaviza los impuestos a lo largo del tiempo para minimizar las distorsiones dinámicas. La deuda (o ahorro gubernamental) servirá como amortiguador.

## 6.9. Conclusiones

Bajo ciertos supuestos en las preferencias del consumidor, el Problema de Asignación de Ramsey arroja dos resultados principales sobre la política fiscal y monetaria óptima:

1. No generar distorsiones márgenes intertemporales.
2. Distorsionar márgenes intratemporales en la misma magnitud cada periodo.

## 6.10. Referencias

(1) Chari, V., L. Christiano y P. Kehoe (1993). *Optimality of the Friedman rule in economies with distorting taxes*. NBER working papers.

(2) Sargent, T. y L. Ljungqvist (2012), *Recursive Macroeconomic Theory*, third edition, The MIT Press.

(3) Urrutia, C. (2011). *Curso de Macroeconomía Avanzada: "Política Fiscal y Monetaria Óptima"*.

## 6.11. Ejercicios

### I. Problema de Asignación de Ramsey con impuesto al capital

Considere el modelo de efectivo por adelantado, con un impuesto al consumo bien de crédito $d_t$ y al retorno del capital $(q_t + (1-\delta))k_{t-1}$. Las preferencias del consumidor representativo están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, d_t, l_t, g_t)$$

Donde $c_t$ es un bien de consumo, el cual está sujeto a la restricción de efectivo por adelantado; $d_t$ es otro bien de consumo, el cual puede ser comprado una vez que el consumidor recibió sus demás ingresos, en la tarde; $l_t$ el tiempo trabajado y $g_t$ es un bien provisto por el gobierno. La temporalidad del problema es la siguiente:

1. En la mañana, con el dinero que guardó el periodo anterior $M_{t-1}$, el consumidor elige su nivel nominal de consumo $P_t c_t$.

2. En la tarde, con el remanente de las compras de la mañana, el ingreso laboral $w_t l_t$ y de capital $q_t k_{t-1}$ y el retorno nominal del bono $(1+i_{t-1})B_{t-1}$; el consumidor invierte en capital, ahorra, guarda dinero para el próximo periodo y compra el bien $d_t$.

La empresa cuenta con una tecnología $F(k_{t-1}, l_t)$ que exhibe rendimientos constantes a escala. La empresa incurre en costos laborales y de capital y percibe los ingresos por concepto de la venta de ambos bienes $y_t^c$ y $y_t^d$.

$$\max \ y_t^c + y_t^d - w_t l_t - q_t k_{t-1}$$
$$\text{s.t. } y_t^c + y_t^d = F(k_{t-1}, l_t)$$

El gobierno financia el gasto gubernamental con emisión de dinero, con el impuesto al consumo del bien de crédito $\tau_t^d d_t$ y con el impuesto al retorno del capital $\tau_t^k(q_t + (1-\delta))k_{t-1}$. Adicionalmente, el gobierno tiene acceso a los mercados de crédito. En términos del vaciado de mercado, la producción se utiliza como inversión en capital, como consumo de ambos bienes o como gasto gubernamental.

(I) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(II) Resuelva el problema del consumidor.

(III) Exprese precios e impuestos en función de cantidades.

En lo posterior, tome como dada la condición de implementabilidad.

$$\sum_t \beta^t [u_{c_t} c_t + u_{d_t} d_t + u_{l_t} l_t] = u_{d_0} \Phi_{-1}$$

(IV) Plantee y resuelva el Problema de Asignación de Ramsey, considerando que la función de utilidad instantánea es aditivamente separable en el trabajo.

(V) Compare el Estado Estacionario de la solución del Problema de Asignación de Ramsey y del Equilibrio Competitivo. ¿Cuál es el impuesto óptimo al retorno del capital en el largo plazo? Interprete.

En lo posterior, considere la siguiente función de utilidad instantánea.

$$u(c,d,l,g) = \tfrac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \tfrac{d^{1-\phi}}{1-\phi} - \tfrac{l^{1+\varphi}}{1+\varphi} + v(g); \quad \sigma,\phi,\varphi > 0$$

(VI) Encuentre el impuesto al retorno del capital, el impuesto al bien de crédito y la tasa de interés, en la transición.

(VII) ¿Se cumple la Regla de Friedman?

(VIII) Considere $\sigma = \phi$. ¿Cómo se modifican los resulados previos?

## II. Problema de Asignación de Ramsey con impuesto a las empresas

Considere el modelo de efectivo por adelantado, con un impuesto $\tau_t^l$ al costo laboral y un impuesto $\tau_t^k$ a la renta de capital, ambos aplicados a las empresas. Las preferencias del consumidor representativo están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\textstyle\sum_t \beta^t u(c_t, d_t, l_t, g_t)$$

Donde $c_t$ es un bien de consumo, el cual está sujeto a la restricción de efectivo por adelantado; $d_t$ es otro bien de consumo, el cual puede ser comprado una vez que el consumidor recibió sus demás ingresos, en la tarde; $l_t$ el tiempo trabajado y $g_t$ es un bien provisto por el gobierno. La temporalidad del problema es la siguiente:

1. En la mañana, con el dinero que guardó el periodo anterior $M_{t-1}$, el consumidor elige su nivel nominal de consumo $P_t c_t$.

2. En la tarde, con el remanente de las compras de la mañana, el ingreso laboral $w_t l_t$ y de capital $q_t k_{t-1}$ y el retorno nominal del bono $(1+i_{t-1})B_{t-1}$; el consumidor invierte en capital, ahorra, guarda dinero para el próximo periodo y compra el bien $d_t$.

La empresa cuenta con una tecnología $F(k_{t-1}, l_t)$ que exhibe rendimientos constantes a escala. La empresa incurre en costos laborales y de capital y percibe los ingresos por concepto de la venta de ambos bienes $y_t^c$ y $y_t^d$. El costo laboral se halla gravado a una tasa $\tau_t^l$ y el costo de capital a la tasa $\tau_t^k$.

El gobierno financia el gasto gubernamental con emisión de dinero, con el impuesto al costo laboral y con el impuesto al costo de capital. Adicionalmente, el gobierno tiene acceso a los mercados de crédito. En términos del vaciado de mercado, la producción se utiliza como inversión en capital, como consumo de ambos bienes o como gasto gubernamental.

(I) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(II) Resuelva el problema del consumidor y de la empresa.

(III) Exprese impuestos y tasa de interés en función de cantidades. Es decir, considerando las CPO de la empresa, calcule la Tasa Marginal de Sustitución entre el bien de efectivo y el de crédito, la Tasa Marginal de Sustitución entre el trabajo y el bien de crédito y la ecuación de Euler.

(IV) *Puntos extra si resuelve esta pregunta, no es obligatoria.*

Demuestre que la condición de implementabilidad está dada por

$$\sum_t \beta^t [u_{c_t} c_t + u_{d_t} d_t + u_{l_t} l_t] = u_{d_0} \Phi_{-1}$$

En lo posterior, tome como dada la condición de implementabilidad.

(V) Plantee y resuelva el Problema de Asignación de Ramsey $\forall t \geq 1$, considerando que la función de utilidad instantánea es aditivamente separable en el trabajo.

(VI) Compare el Estado Estacionario de la solución del Problema de Asignación de Ramsey y del Equilibrio Competitivo. ¿Cuál es el impuesto óptimo al costo del capital en el largo plazo? Interprete.

En lo posterior, considere la siguiente función de utilidad instantánea.

$$u(c, d, l, g) = \tfrac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \tfrac{d^{1-\phi}}{1-\phi} - \tfrac{l^{1+\varphi}}{1+\varphi} + v(g); \quad \sigma, \phi, \varphi > 0$$

(VII) Encuentre el impuesto al costo laboral, al costo de capital y la tasa de interés, en la transición.

(VIII) ¿Se cumple la Regla de Friedman?

## III. Problema de Asignación de Ramsey con un tercer factor de producción

Considere el modelo de efectivo por adelantado, con un tercer factor de producción $z_t$, el cual es propiedad del consumidor, quien lo renta a la empresa a un precio $\rho_t$. Puede pensar en este factor adicional como tierra, y en su precio como el arrendamiento.

Las preferencias del consumidor representativo están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, l_t, g_t)$$

Donde $c_t$ es un bien de consumo, el cual está sujeto a la restricción de efectivo por adelantado; $l_t$ el tiempo trabajado y $g_t$ es un bien provisto por el gobierno. Cada periodo, el consumidor tiene una unidad del tercer factor productivo (i.e., cada periodo el consumidor tiene la misma unidad de tierra, la cual no se deprecia). El consumidor renta (oferta) este factor a la empresa representativa a un precio $\rho_t$.

Adicionalmente, existe un impuesto $\tau_t^k$ a la renta de capital $q_t k_{t-1}$. La temporalidad del problema es la siguiente:

1. En la mañana, con el dinero que guardó el periodo anterior $M_{t-1}$, el consumidor elige su nivel nominal de consumo $P_t c_t$.

2. En la tarde, con el remanente de las compras de la mañana, el ingreso laboral $w_t l_t$, de capital $(1-\tau_t^k)q_t k_{t-1}$ y el pago de la tierra $\rho_t$ (porque el consumidor oferta la totalidad de su unidad de tierra) y el retorno nominal del bono $(1+i_{t-1})B_{t-1}$; el consumidor invierte en capital, ahorra y guarda dinero para el próximo periodo.

La empresa cuenta con una tecnología $y_t = F(k_{t-1}, l_t, z_t)$ que exhibe rendimientos constantes a escala en los tres argumentos: capital, trabajo y tierra. La empresa incurre en costos laborales, de capital y de tierra, y percibe como ingreso la venta del bien. Recuerda que la empresa demanda los tres factores productivos, tomando los precios como dados (i.e., no sabe que la tierra se encuentra en una oferta fija).

El gobierno financia el gasto gubernamental con emisión de dinero y con el impuesto a la renta de capital. Adicionalmente, el gobierno tiene acceso a los mercados de crédito. En términos del vaciado de mercado de bienes, la producción se utiliza como inversión en capital, como consumo o como gasto gubernamental. Respecto al vaciado del mercado de factores productivos, la cantidad ofertada iguala a la demandada.[7]

(i) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(ii) Resuelva el problema del consumidor y de la empresa.

(iii) Exprese precios e impuestos en función de cantidades. En particular, obtenga la Tasa Marginal de Sustitución entre ocio y consumo y la ecuación de Euler.

(iv) *Puntos extra si resuelve esta pregunta, no es obligatoria.*

Demuestre que la condición de implementabilidad está dada por

$$\sum_t \beta^t [u_{c_t}(c_t - F_{z_t}) + u_{l_t} l_t] = u_{c_o} \Phi_{-1}$$

[7]Ejercicio basado en Sargent, T. y L. Ljungqvist (2012), *Recursive Macroeconomic Theory*, third edition, The MIT Press.

En lo posterior, tome como dada la condición de implementabilidad.

(V) Plantee y resuelva el Problema de Asignación de Ramsey $\forall t \geq 1$, considerando que la función de utilidad instantánea es aditivamente separable en el trabajo.

(VI) Compare el Estado Estacionario de la solución del Problema de Asignación de Ramsey y del Equilibrio Competitivo y demuestre que la tasa de impuesto óptima a la renta de capital está dada por:

$$\tau^k = -\tfrac{\nu}{\gamma} u_c \tfrac{F_{zk}}{F_k}$$

Donde $\nu$ es el multiplicador asociado a la condición de implementabilidad y $\gamma$ es el valor de Estado Estacionario del multiplicador $\gamma_t$ de la condición de factibilidad.

(VII) Satisfaciendo las Condiciones de Inada sobre la función de utilidad y producción, escriba una función de producción $F$ tal que el impuesto óptimo a la renta de capital sea cero.

## IV. Problema de Asignación de Ramsey con un Obrero y un Capitalista

Considere el modelo de efectivo por adelantado en una economía poblada por dos consumidores. Las preferencias del consumidor $j \in \{A, B\}$ están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\textstyle\sum_t \beta^t u(c_t^j, l_t^j, g_t)$$

Donde $c_t^j$ es un bien de consumo, el cual está sujeto a la restricción de efectivo por adelantado; $l_t^j$ el tiempo trabajado y $g_t$ es un bien provisto por el gobierno. Se considera que el bien $g_t$ es un bien público.

El consumidor $A$ es dueño de todo el capital en la economía, mientras que el consumidor $B$ no posee capital. Ambos consumidores tienen acceso a los mercados financieros.

En esta economía existe un impuesto $\tau_t^k$ a la renta de capital y un impuesto $\tau_t^l$ al ingreso laboral. La temporalidad del problema es la siguiente:

1. En la mañana, con el dinero que guardó el periodo anterior $M_{t-1}^j$, el consumidor $j \in \{A, B\}$ elige su nivel nominal de consumo $P_t c_t^j$.

2. En la tarde, con el remanente de las compras de la mañana, el ingreso laboral $(1 - \tau_t^l) w_t l_t^j$, de capital $(1 - \tau_t^k) q_t k_{t-1}^j$ y el retorno nominal del bono $(1 + i_{t-1}) B_{t-1}^j$; el consumidor invierte en capital, ahorra y guarda dinero para el próximo periodo.

La empresa cuenta con una tecnología $y_t = F(k_{t-1}, l_t)$ que exhibe rendimientos constantes a escala. La empresa incurre en costos laborales y de capital y percibe los ingresos por la venta del bien.

El gobierno financia el gasto gubernamental con emisión de dinero y con la recaudación de ambos impuestos. Adicionalmente, el gobierno tiene acceso a los mercados de crédito.

(I) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(II) Resuelva el problema de cada consumidor y de la empresa.

(III) Exprese precios e impuestos en función de cantidades. En particular, obtenga la Tasa Marginal de Sustitución entre ocio y consumo y la ecuación de Euler.

(IV) Derive la condición de implementabilidad de cada consumidor.

(V) Plantee y resuelva el Problema de Asignación de Ramsey $\forall t \geq 1$, considerando que la función de utilidad instantánea $u$ es aditivamente separable en el trabajo y que en la función de bienestar social se valora al consumidor $A$ en $\phi \in [0, 1]$ y al consumidor $B$ en el restante $(1 - \phi)$.

(VI) Compare el Estado Estacionario de la solución del Problema de Asignación de Ramsey y del Equilibrio Competitivo y demuestre que el impuesto óptimo a la renta de capital es cero $\forall \phi \in (0, 1)$.

(VII) Discuta el resultado anterior en términos de la equidad del sistema tributario.

(VIII) ¿Cómo se modificaría el impuesto óptimo al capital si el consumidor $A$ no tuviera acceso a los mercados financieros?

## V. Problema de Asignación de Ramsey con Impuestos Incompletos

Dos tipos de trabajo (Sargent y Ljungqvist, ejercicio 16.5). También, revisar apuntes de Urrutia.

Considere el modelo de efectivo por adelantado, con un impuesto $\tau_t^l$ al ingreso laboral. Las preferencias del consumidor representativo están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, d_t, l_t^1, l_t^2, g_t)$$

Donde $c_t$ es un bien de consumo, el cual está sujeto a la restricción de efectivo por adelantado; $d_t$ es otro bien de consumo, el cual puede ser comprado una vez que el consumidor recibió sus demás ingresos, en la tarde; $l_t^i$ el tiempo trabajado en el sector $i$ y $g_t$ es un bien provisto por el gobierno. En otras palabras, el consumidor encuentra más placentero trabajar en un sector que en el otro. La temporalidad del problema es la siguiente:

1. En la mañana, con el dinero que guardó el periodo anterior $M_{t-1}$, el consumidor elige su nivel nominal de consumo $P_t c_t$.

2. En la tarde, con el remanente de las compras de la mañana, el ingreso laboral $w_t l_t$ y de capital $q_t k_{t-1}$ y el retorno nominal del bono $(1+i_{t-1})B_{t-1}$; el consumidor invierte en capital, ahorra, guarda dinero para el próximo periodo y compra el bien $d_t$.

La empresa en el sector $i$ cuenta con una tecnología $F(k^i_{t-1}, l^i_t)$ que exhibe rendimientos constantes a escala. La empresa incurre en costos laborales y de capital y percibe los ingresos por concepto de la venta de ambos bienes $y^i_t$.

El gobierno financia el gasto gubernamental con emisión de dinero, con el impuesto al costo laboral y con el impuesto al costo de capital. Adicionalmente, el gobierno tiene acceso a los mercados de crédito. En términos del vaciado de mercado, la producción se utiliza como inversión en capital, como consumo de ambos bienes o como gasto gubernamental.

(I) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

(II) Resuelva el problema del consumidor y de la empresa.

(III) Exprese impuestos y tasa de interés en función de cantidades. Es decir, considerando las CPO de la empresa, calcule la Tasa Marginal de Sustitución entre el bien de efectivo y el de crédito, la Tasa Marginal de Sustitución entre el trabajo y el bien de crédito y la ecuación de Euler.

(IV) *Puntos extra si resuelve esta pregunta, no es obligatoria.*

Demuestre que la condición de implementabilidad está dada por

$$\sum_t \beta^t [u_{c_t} c_t + u_{d_t} d_t + u_{l_t} l_t] = u_{d_0} \Phi_{-1}$$

En lo posterior, tome como dada la condición de implementabilidad.

(V) Plantee y resuelva el Problema de Asignación de Ramsey $\forall t \geq 1$, considerando que la función de utilidad instantánea es aditivamente separable en el trabajo.

(VI) Compare el Estado Estacionario de la solución del Problema de Asignación de Ramsey y del Equilibrio Competitivo. ¿Cuál es el impuesto óptimo al costo del capital en el largo plazo? Interprete.

En lo posterior, considere la siguiente función de utilidad instantánea.

$$u(c, d, l_1, l_2, g) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{d^{1-\phi}}{1-\phi} - \frac{l_1^{1+\varphi_1}}{1+\varphi_1} - \frac{l_2^{1+\varphi_2}}{1+\varphi_2} + v(g); \quad \sigma, \phi, \varphi > 0$$

(VII) Encuentre el impuesto al costo laboral, al costo de capital y la tasa de interés, en la transición.

(VIII) ¿Se cumple la Regla de Friedman?

## VI. Problema de Asignación de Ramsey con Transferencias Gubernamentales

Gobierno compra bienes privados $g_t$ y provee transferencias sociales $\Omega_t$. Las transferencias no pueden ser negativas, de lo contrario estas servirían como impuestos de suma fija y la solución del problema sería trivial.

La condición de implementabilidad está dada por:

$$\sum_t \beta^t [u_{c_t} c_t + u_{l_t} l_t - u_{c_t} \Omega_t] = u_{d_0} \Phi_{-1}$$

## VII. Problema de Asignación de Ramsey con Impuesto a las Ganancias de la Empresa

Considerar tecnología con Rendimientos Decrecientes a Escala e impuesto a las ganancias de la empresa. Especificar quién paga el impuesto.

## VIII. Problema de Asignación de Ramsey con Capital Humano

Utility function $\sum_t \beta^t (c_t, l_t, g_t)$

Technology $y_t = F(k_{t-1}, e_t)$, where $F$ is CRS in capital and labor efficiency units.

Physical capital law of motion $k_t = x_t^k + (1-\delta) k_{t-1}$

Human capital law of motion $h_t = x_t^h + (1-\phi) h_{t-1}$

$l_t$ units of time create $h_{t-1} l_t$ units of labor efficiency.

Tax on consumption, physical capital and human capital.

Show that optimal tax on both types of capital is zero.

## IX. Problema de Asignación de Ramsey con Hábitos de Consumo

Preferencias:

$$\sum_t \beta^t u(c_t, c_{t-1}, d_t, d_{t-1}, l_t, g_t)$$

Condición de implementabilidad:

$$\sum_t \beta^t [(\frac{\partial u_t}{\partial c_t} + \beta \frac{\partial u_{t+1}}{\partial c_t}) c_t + (\frac{\partial u_t}{\partial c_t} + \beta \frac{\partial u_{t+1}}{\partial c_t}) d_t + u_{l_t} l_t] = u_{d_0} \Phi_{-1}$$

# 7

# Modelo Neokeynesiano

## 7.1. Introducción

A diferencia de los modelos Neoclásicos en que los precios se determinan libremente periodo a periodo, en los modelos Neokeynesianos se consideran rigideces nominales. Es decir, es costoso para las empresas ajustar precios dentro de un periodo.

Como se requiere que las empresas tomen decisiones sobre los precios, el ambiente de Equilibrio Competitivo es fútil para analizar rigideces nominales, porque en dicho esquema las empresas son precio aceptantes. Consecuentemente, se introducirá un marco de competencia monopolística.

## 7.2. Descripción de la economía

La economía está poblada por un consumidor representativo con preferencias descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t u(c_t, l_t), \text{ donde}$$
$$c_t := [\int_0^1 c_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \, dj]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

Bajo esta especificación, $l_t$ es el tiempo que destina el consumidor a trabajar y $c_t$ es un agregador de consumo, compuesto por un continuo (de medida unitaria) de variedades $j \in [0, 1]$.

Adicionalmente, $\varepsilon$ es la elasticidad precio de cada variedad.[1] De tal suerte, al considerar $\varepsilon > 1$ se supone que las variedades tienen un cierto grado de sustitutabilidad (e.g., diferentes modelos de celulares, en lugar de manzanas y plátanos).

Si bien el dinero existe como unidad de medida, no se especificará la razón por la cual el dinero es valioso (a diferencia de los modelos clásicos vistos en los primeros capítulos). Es decir, no se obtendrá una demanda por dinero.

[1] Esto se demostrará posteriormente.

Por simplicidad, se utiliza la siguiente forma funcional de la utilidad instantánea:

$$u(c_t, l_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{l_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}, \text{ con } \sigma > 0 \text{ y } \varphi > 0$$

Donde $\sigma$ y $\varphi$ representan elasticidades de sustitución intertemporal.

Por parsimonia del modelo, se asume que no existe capital en esta economía. De esta manera, el consumidor puede comprar variedades de consumo o ahorrar. Lo anterior lo satisface con su ingreso laboral, los beneficios de las empresas y el retorno del bono.

$$\int_0^1 P_t(j)c_t(j)\ dj + B_t = W_t l_t + \int_0^1 \Omega_t(j)\ dj + (1 + i_{t-1})B_{t-1}$$

$P_t(j)$ es el precio de la variedad $j$, $W_t$ es el salario nominal, $\Omega_t(j)$ son los beneficios nominales instantáneos de la empresa $j$.

Cada variedad $j \in [0, 1]$ es producida por un monopolista[2] mediante la siguiente función de producción:[3]

$$y_t(j) = A_t l_t(j)$$

Note que la productividad $A_t$ no depende del tipo de variedad $j$. Por construcción, cada monopolista enfrenta una demanda $D_t(P_t(j))$ por su variedad y maximiza beneficios, eligiendo el precio de su variedad $P_t(j)$.

En un ambiente sin rigideces nominales, el problema del monopolista es:

$$\max\ P_t(j)y_t(j) - W_t l_t(j)$$
$$\text{s.t. } y_t(j) = D_t(P_t(j))$$
$$l_t(j) = \frac{y_t(j)}{A_t}$$

Incorporando las restricciones en la función objetivo:

$$\max\ P_t(j)D_t(P_t(j)) - \frac{W_t}{A_t}D_t(P_t(j))$$

Existen dos formas de introducir las rigideces nominales.

1. Precios a la Calvo.

   Cada periodo cada monopolista puede ajustar su precio con probabilidad $(1-\theta) \in (0, 1)$. Como se está considerando un continuo de empresas, cada periodo una proporción $(1-\theta)$ de ellas podrá ajustar su precio, mientras que el restante $\theta$ no podrá hacerlo.

   De esta manera, el objetivo del monopolista $j$ en el periodo $t$ es hallar $P_t^*(j)$ tal que:

[2]Por consiguiente, habrá una un continuo (de medida unitaria) de monopolistas.

[3]Incluso con tecnología linear, $\Omega(j) > 0$, porque las empresas operan de forma monopolística.

$$\max \sum_k \theta^k Q_{t,t+k}[P_t^*(j)y_{t+k}(j) - W_{t+k}l_{t+k}(j)]$$

$$\text{s.t. } y_{t+k}(j) = D_{t+k}(P_t^*(j))$$

$$l_{t+k} = \frac{y_{t+k}(j)}{A_{t+k}}$$

Donde $Q_{t,t+k} = (\prod_{m=0}^{k-1} \frac{1}{1+i_{t+m}})$.

2. Precios a la Rotemberg.

   Cualquier monopolista puede cambiar su precio en cualquier periodo. No obstante, al hacerlo incurren en un costo:

$$\frac{\gamma}{2}\frac{(P_t(j)-P_{t-1}(j))^2}{P_{t-1}}$$

   Donde $P_t$ es el nivel general de precios de la economía. Por consiguiente, el problema del monopolista $j$ es el siguiente:

En cualquiera de las dos especificaciones, el problema de la empresa es dinámico. Por simplicidad, se estudiará el modelo de Rotemberg.

## 7.3. Equilibrio Competitivo Monopolístico

Un Equlibrio Competitivo Monopolístico para esta economía es $\{l_t, c_t(j), l_t(j), B_t, P_t(j), W_t, i_t\}$ tal que:

1. Tomando como dados $\{P_t, W_t, i_t\}$; $\{c_t, l_t, B_t\}$ resuelve el problema del consumidor

$$\max \sum_t \beta^t [\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{l_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}]$$

$$\text{s.t. } c_t = [\int_0^1 c_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dj]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

$$\int_0^1 P_t(j)c_t(j)dj + B_t = W_t l_t + \Omega_t + (1+i_{t-1})B_{t-1}$$

$$B_{-1} \text{ dado y } \Omega_t = \int_0^1 \Omega_t(j)dj$$

2. Para cada empresa $j \in [0,1]$, tomando como dado $\{W_t, i_t\}$; $\{P_t(j), l_t(j)\}$ resuelve el problema de la empresa

$$\max \sum_t (\Pi_{s=0}^{t-1} \frac{1}{1+i_s})(P_t(j)y_t(j) - W_t l_t(j) - \frac{\gamma}{2}\frac{(P_t(j)-P_{t-1}(j))^2}{P_t})$$

$$\text{s.t. } y_t(j) = D_t(P_t(j))$$

$$y_t(j) = A_t l_t(j)$$

$$P_{-1}(j) \text{ dado}$$

Donde $D_t(P_t(j))$ es la demanda privada por la variedad $j$ y $\Omega_t(j)$ son los beneficios instantáneos de la empresa $j$.

3. El gobierno determina una regla para la tasa de interés.

4. Los mercados se vacían

$$c_t(j) = y_t(j) \ \forall t, j$$

$$l_t(j) = \int_0^1 l_t(j)dj \ \forall t$$

$$B_t = 0 \ \forall t$$

## 7.4. Solución del Equilibrio

Para resolver el problema del consumidor, este se dividirá en dos etapas: (I) minimizar gasto en variedades y (II) maximizar utilidad.

### I. Minimización de gasto

Para cada nivel del índice de consumo $c_t$, el hogar escogerá la combinación de variedades que minimiza el gasto.

$$\min \int_0^1 P_t(j)c_t(j) \ dj$$

$$\text{s.t. } [\int_0^1 c_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \ dj]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \geq c_t$$

La restricción se satisfacerá con igualdad. Asociando el multiplicador $\mu$ a la restricción y calculando lsa CPO.

$$c_t(j): \quad P_t(j) = \mu\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)[\int_0^1 c_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \ dj]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}-1}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)c_t(j)^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$P_t(j) = \mu c_t^{\frac{1}{\varepsilon}} c_t(j)^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$c_t(j) = \left(\frac{\mu}{P_t(j)}\right)^{\varepsilon} c_t \ (1)$$

$$c_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \left(\frac{\mu}{P_t(j)}\right)^{\varepsilon-1} c_t^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

Integrando sobre $j$ se puede resolver para el multiplicador.

$$\int_0^1 c_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \ dj = \mu^{\varepsilon-1} c_t^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \int_0^1 P_t(j)^{\varepsilon-1} \ dj$$

$$c_t^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \mu^{\varepsilon-1} c_t^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \int_0^1 P_t(j)^{\varepsilon-1} \ dj$$

$$\mu = [\int_0^1 P_t(j)^{1-\varepsilon} \ dj]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} =: P_t$$

Considerando que los multiplicadores de Lagrange se pueden interpretar como precios sombra, el multiplicador $\mu$ se puede entender como el precio sombra del índice de consumo.

Sustituyendo el multiplicador $\mu$ por el índice de precios $P_t$ en la ecuación (1), se obtiene la demanda por la variedad $j$.

$$c_t(j) = \left(\frac{P_t}{P_t(j)}\right)^{\varepsilon} c_t =: D_t(P_t(j)) \ (2)$$

De tal suerte, se puede mostrar que la elasticidad de la variedad $j$ respecto a su mismo precio es $\varepsilon$, mientras que la elasticidad de la variedad $j$ respecto al precio de la variedad $k(\neq j)$ es cero.

Con base en la ecuación (2) y la defინción del índice de precios se puede mostrar que el gasto en variedades es igual al gasto en el índice de consumo.

$$\int_0^1 P_t(j)c_t(j)\ dj = P_t c_t$$

## II. Maximización de utilidad

Utilizando el resultado previo, el problema del consumidor se simplifica de la siguiente manera.

$$\max \sum_t \beta^t [\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{l_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}]$$
$$\text{s.t. } P_t c_t + B_t = W_t l_t + \Omega_t + (1 + i_{t-1})B_{t-1}$$

Asociando el multiplicador $\beta^t \lambda_t$ a la restricción presupuestal y calculando las CPO.

$$c_t : \quad c_t^{-\sigma} = \lambda_t P_t$$
$$l_t : \quad l_t^{\varphi} = l_t W_t$$
$$B_t : \quad \lambda_t = \beta \lambda_{t+1}(1 + i_t)$$

Combinando las ecuaciones anteriores, se obtiene:

Ocio - Consumo

$$\frac{l_t^{\varphi}}{c_t^{-\sigma}} = \frac{W_t}{P_t}$$

Ecuación de Euler

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\sigma} = \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}$$

Una vez resuelto el problema del consumidor, es momento de solventar el problema del monopolista $j$.

$$\max \sum_t (\Pi_{s=0}^{t-1} \frac{1}{1+i_s})(P_t(j)y_t(j) - W_t l_t(j) - \frac{\gamma}{2}\frac{(P_t(j)-P_{t-1}(j))^2}{P_t})$$
$$\text{s.t. } y_t(j) = P_t^{\varepsilon} P_t(j)^{-\varepsilon} c_t$$
$$y_t(j) = A_t l_t(j)$$
$$P_{-1}(j) \text{ dado}$$

Donde la demanda por la variedad $j$ es la obtenida en el problema de minimización de gasto del consumdor.

Incorporando las restricciones en la función objetivo, el problema se sintetiza.

$$\max \sum_t (\Pi_{s=0}^{t-1} \frac{1}{1+i_s})(P_t^{\varepsilon} P_t(j)^{1-\varepsilon} c_t - \frac{W_t}{A_t} P_t^{\varepsilon} P_t(j)^{-\varepsilon} c_t - \frac{\gamma}{2}\frac{(P_t(j)-P_{t-1}(j))^2}{P_t})$$
$$P_{-1}(j) \text{ dado}$$

Calculando las CPO con respecto a $P_t(j)$, se obtiene:

$$(1-\varepsilon)P_t(j)^{-\varepsilon} P_t^{\varepsilon} c_t + \varepsilon \frac{W_t}{A_t} P_t(j)^{-\varepsilon-1} P_t \varepsilon c_t - \gamma \frac{P_t(j)-P_{t-1}(j))}{P_{t-1}} + \frac{1}{1+i_t}\gamma \frac{P_{t+1}(j)-P_t(j)}{P_t} = 0$$

Reordenando términos, se obtiene la siguiente expresión:

$$\left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} \left((1-\varepsilon) + \varepsilon \frac{W_t}{A_t}\frac{1}{P_t(j)}\right) c_t = \gamma \left(\frac{P_t(j)-P_{t-1}(j))}{P_{t-1}} - \frac{1}{1+i_t}\frac{P_{t+1}(j)-P_t(j)}{P_t}\right)$$

Para analizar el rol de la distorsión monopólica, por el momento se supondrá que $\gamma = 0$. Bajo este supuesto, la ecuación anterior colapsa a:

$$P_t(j) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)\frac{W_t}{A_t}$$

En un ambiente de competencia perfecta, el precio $P_t(j)$ iguala a su costo marginal $\frac{W_t}{A_t}$. No obstante, bajo la distorsión monopólica, el precio es mayor a su costo marginal en la proporción $\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)$. A dicho término se le denominará *mark-up* o poder monopólico.

El *mark-up* es una función decreciente en $\varepsilon$, es decir, mientras más sustituibles sean las variedades, menor será el poder monopólico.

Regresando al entorno con rigideces nominales ($\gamma > 0$). Como las empresas son idénticas entre ellas (*i.e.*, misma tecnología y misma demanda), entonces estas se comportarán de manera idéntica.[4] Por consiguiente:

$$P_t(j) = P_t(0) = P_t \ \forall j$$
$$c_t(j) = c_t(0) = c_t \ \forall j$$
$$l_t(j) = l_t(0) = l_t \ \forall j$$

[4]Al resolver problema de las empresas, primeramente se derivó el comportamiento óptimo de las firmas y luego se impuso simetría. No al revés, de lo contratio, se hubiera modificado el problema que estas enfrentan.

La primera igualdad se obtiene de la simetría entre empresas y la segunda de las definiciones del índice de precios y consumo y del vaciado del mercado laboral.

$$P_t = [\int_0^1 P_t(j)^{1-\varepsilon}\ dj]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = [\int_0^1 P_t(0)^{1-\varepsilon}\ dj]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = P_t(0)$$
$$c_t = [\int_0^1 c_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\ dj]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = [\int_0^1 c_t(0)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\ dj]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = c_t(0)$$
$$l_t = \int_0^1 l_t(j)\ dj = \int_0^1 l_t(0)\ dj = l_t(0)$$

Reordenando términos, se obtiene:

$$\left((1-\varepsilon) + \varepsilon \frac{W_t}{A_t P_t}\right) c_t = \gamma \left( (\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1) - \frac{1}{1+i_t} (\frac{P_{t+1}}{P_t} - 1) \right)$$

## 7.5. Caracterización del Equilibrio

El siguiente sistema de ecuaciones (más las condiciones inciales y de transversalidad) caracterizan la solución para $\{l_t, c_t, W_t, P_t, i_t\}$

Ocio - Consumo

$$\frac{l_t^{\varphi}}{c_t^{-\sigma}} = \frac{W_t}{P_t}$$

Ecuación de Euler

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\sigma} = (1+i_t)\frac{P_t}{P_{t+1}}$$

Factibilidad

$$c_t = A_t l_t$$

Empresa

$$\left((1-\varepsilon) + \varepsilon \frac{W_t}{A_t P_t}\right) c_t = \gamma \left( (\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1) - \frac{1}{1+i_t} (\frac{P_{t+1}}{P_t} - 1) \right)$$

Regla para la tasa de interés.

Más aún, de la ecuación de Euler, se exhibe una relación negativa entre la tasa de interés real y el producto del periodo corriente. Consecuentemente, se obtiene una versión de la curva IS extendida por el producto futuro. A diferencia del modelo Keynesiano, en esta especificación la curva IS es una *forward-looking equation*.

Incorporando la condición de Factibilidad y la de Ocio - Consumo en la conición de la Empresa, se obtiene una relación positiva entre empleo e inflación del periodo corriente.

$$\left((1-\varepsilon) + \varepsilon A_t^{\sigma-1} l_t^{\varphi+\sigma}\right) A_t l_t = \gamma \left( \pi_t - \frac{1}{1+i_t} \pi_{t+1} \right)$$

Así, se obtiene una versión extendida de la curva de Phillips extendida por el trabajo y la inflación futura. De igual manera, esta nueva especificación de la curva de Phillips es una *forward-looking equation.*

Alternativamente, el siguiente sistema de ecuaciones (más las condiciones iniciales y de transversalidad) caracterizan la solución para $\{l_t, P_t, i_t\}$

Curva IS

$$\tfrac{1}{\beta}\left(\tfrac{A_{t+1}l_{t+1}}{A_t l_t}\right)^{\sigma} = (1+i_t)\tfrac{P_t}{P_{t+1}}$$

Curva de Phillips

$$\left((1-\varepsilon)+\varepsilon A_t^{\sigma-1} l_t^{\varphi+\sigma}\right) A_t l_t = \gamma\left(\pi_t - \tfrac{1}{1+i_t}\pi_{t+1}\right)$$

Regla para la tasa de interés.

## 7.6. Planeador Social

El problema del Planeador Social es:

$$\begin{aligned} &\max \textstyle\sum_t \beta^t [\tfrac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \tfrac{l_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}] \\ &\text{s.t. } c_t = [\textstyle\int_0^1 c_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dj]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\ &c_t(j) = A_t l_t(j) \\ &\textstyle\int_0^1 l_t(j)\ dj = l_t \end{aligned}$$

Asociando el multiplicador $\beta^t\lambda_t$ a la condición de factibilidad y el multiplicador $\beta^t\mu_t$ al vaciado del mercado laboral.

$$\begin{aligned} c_t(j):&\quad c_t^{-\sigma} c_t^{\frac{1}{\varepsilon}} c_t(j)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \lambda_t(j) \Longrightarrow c_t(j) = \tfrac{c_t^{-\sigma\varepsilon} c_t^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\lambda_t(j)^{\varepsilon}} \\ l_t(j):&\quad -l_t^{\varphi} + \lambda_t(j)A_t - \mu_t = 0 \Longrightarrow \lambda_t(j) = \tfrac{\mu_t + l_t^{\varphi}}{A_t} \end{aligned}$$

Como el lado derecho de la FOC $l_t(j)$ no depende de la variedad $j$, entonces el lado izquierdo tampoco. Mismo argumento para la FOC $c_t(j)$. Por consiguiente, $\lambda_t(j) = \lambda_t, c_t(j) = c_t$ y $l_t(j) = l_t\ \forall j$.

Alternativamente, la simetría se pudo haber argumentado comparando las productividades y las ponderaciones de cada variedad.

Reescribiendo el problema del Planeador Social.

$$\begin{aligned} &\max \textstyle\sum_t \beta^t [\tfrac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \tfrac{l_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}] \\ &\text{s.t. } c_t = A_t l_t \end{aligned}$$

Calculando las CPO y manipulándolas, se llega a:

$$\frac{l_t^{\varphi}}{c_t^{-\sigma}} = A_t$$

La ecuación anterior y factibilidad caracterizan la solución del Plaenador Social para $\{c_t, l_t\}$. Dichos valores serán denominados como el nivel natural del producto $y_t^n$ y el nivel natural de empleo $l_t^n$.

$$y_t^n = A_t^{\frac{1+\varphi}{\sigma+\varphi}} \text{ y } l_t^n = A_t^{\frac{1-\sigma}{\sigma+\varphi}}$$

## 7.7. Política Fiscal y Monetaria Óptimas

Al comparar contra la solución del Planeador Social, el modelo Neokeynesiano introduce dos distorsiones:

1. Rigideces nominales.

   La distorsión asociada a las rigideces nominales se corrige cuando los precios son constantes en el tiempo.

   $$P_t = P_{t+1} \Longleftrightarrow \pi_t = 0 \Longleftrightarrow i_t = r_t$$

   A diferencia de la Regla de Friedman ($i_t = 0$), la cual busca eliminar el costo privado de atesorar dinero; en este modelo Neokeynesiano, se busca igualar la tasa nominal con la real para eliminar la inflación y, con ello, mitigar la distorsión de las rigideces nominales.

   Como las rigideces nominales añaden un costo a las empresas, entonces ante choques de demanda o de productividad estas ajustarán sus precios menos de lo que sería óptimo.

2. Comportamiento monopólico.

   Como las empresas se comportan de forma monopolística, la producción y el trabajo será menor, mientras que el precio será mayor al de un ambiente de competencia perfecta.

   La distorsión asociada al poder monopólico de las empresas puede corregirse mediante un subsidio al costo laboral de las empreas, siempre que el gobierno tenga acceso a impuestos de suma fija para balancear su restricción de recursos.

   Habiendo eliminado las rigideces nominales e implementando un subsidio al costo laboral, la ecuación de la empresa se reduce a:

   $$\left((1-\varepsilon) + \varepsilon(1-\chi_t)\frac{W_t}{A_t P_t}\right) = 0$$

   Insertando la condición Ocio - Consumo:

   $$\left((1-\varepsilon) + \varepsilon(1-\chi_t)\frac{l_t^{\varphi}}{A_t c_t^{-\sigma}}\right) = 0$$

Considerando un subsidio de tamaño $\chi_t = \frac{1}{\varepsilon}$, la ecuación anterior resulta ser idéntica a la condición del Planeador Social.

$$\frac{l_t^{\varphi}}{c_t^{-\sigma}} = A_t$$

De tal manera, eliminando la distorsión asociada a las rigideces nominales y al poder monopólico, la solución de mercado iguala a la del Planeador Social, en otras palabras, se alcanza el mayor estadio de bienestar.

Sintéticamente, la política fiscal y monetaria óptima consiste en estabilizar el nivel de precios, tal que la tasa inflacionaria sea cero, y lograr que el producto iguale su nivel natural.

$$\pi_t = 0 \text{ y } y_t = y_t^n$$

Sorpresivamente, no existe *trade-off* en la corrección de ambas distorsiones. Divina coincidencia.

## 7.8. Reglas para la Tasa de Interés

No obstante, al considerar un modelo con incertidumbre (y con precios a la Calvo), se puede mostrar que igualar la tasa de interés nominal a la real, puede degenerar en una multiplicidad de resultados. Por lo anterior, se consdieran reglas alternativas.

## 7.9. Referencias

(1) Galí, J. (2015). *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework and its Applications*, second edition, Princeton University Press.

(2) Urrutia (2011). *Curso de Macroeconomía Avanzada. "Política Fiscal y Monetaria Óptimas"*.

(3) Walsh, C. (2010). *Monetary Theory and Policy*, third edition, The MIT Press.

## 7.10. Ejercicios

### I. Modelo Neokeynesiano con gasto gubernamental

Considere el modelo Neokeynesiano visto en clase con un gobierno que compra una cantidad $g_t$ de cada variedad $j \in [0,1]$. El consumidor representativo tiene preferencias descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t [\tfrac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \tfrac{l_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}]$$
$$\text{donde } c_t := [\textstyle\int_0^1 c_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dj]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \text{ con } \varepsilon > 1$$

Donde $c_t(j)$ representa el consumo de la variedad $j \in [0,1]$ y $l_t$ el tiempo destinado a trabajar. Cada variedad $j \in [0,1]$ es producida por un monopolista, el cual cuenta con una tecnología lineal en el trabajo.

$$y_t(j) = A_t l_t(j)$$

Cada monopolista enfrenta una demanda $D_t(P_t(j)) + g_t$ (compras privadas de los hogares más las compras del gobierno) e incurre en un costo por cambiar sus precios.

$$\tfrac{\gamma}{2} \tfrac{(P_t(j) - P_{t-1}(j))^2}{P_{t-1}}$$

Cada monopolista maximiza el flujo descontado de beneficios eligiendo el precio de su variedad $P_t(j)$.

El gobierno financia las compras de cada variedad $g_t$ mediante un impuesto $\tau_t$ al agregador de consumo $c_t$. El gasto $g_t$ se encuentra exógenamente determinado. El gobierno no tiene acceso a los mercados financieros. Se mantiene un presupuesto balanceado en cada periodo.[5]

(I) Define un Equilibrio Competitivo Monopolístico para esta economía.

(II) Resuelve el problema del consumidor. Primeramente obtenga la demanda de cada variedad $j \in [0,1]$ y, posteriormente, calcule la condición de Ocio - Consumo y la ecuación de Euler.

(III) Resuelve el problema de la empresa monopolística $j \in [0,1]$, considerando que todas las empresas son idénticas.

(IV) Caracterice el Equilibrio Competitivo Monopolístico. Es decir, escriba la Condición Ocio - Consumo, la Ecuación de Euler, la Condición de Factibilidad, la Curva de Phillips, la Restricción del Gobierno y la Regla de tasa de interés (no necesita imponer una regla específica, solo recuerde que se necesita para tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas). ¿Para qué incógnitas resuelve este Equilibrio?

[5] Basado en Urrutia (2011). *Curso de Macroeconomía Avanzada. "Política Fiscal y Monetaria Óptimas"*.

(V) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social, considerando que las variedades son idénticas entre ellas e idénticas al agregador.

(VI) Compare la solución del Equilibrio Competitivo Monopolístico con la del Planeador Social y encuentra la política fiscal (impuestos) y monetaria (tasa nominal de interés) que genera el mayor nivel de bienestar.

## II. Modelo Neokeynesiano con salarios pegajosos

En clase se estudió un modelo Neokeynesiano en el que las rigideces nominales generaban que el precio de los bienes fuera pegajoso; mientras que el mercado laboral se comportaba de manera clásica, en el sentido de que un salario flexible vaciaba el mercado laboral. En esta pregunta, se considera un modelo Neokeynesiano con salarios pegajosos y precio del bien flexible.

La empresa representativa produce el único bien en la economía mediante una tecnología descrita por la siguiente función de producción.

$$y_t = A_t l_t$$
$$\text{donde } l_t = [\int_0^1 l_t(j)^{\frac{\eta-1}{\eta}} dj]^{\frac{\eta}{\eta-1}}, \text{ con } \eta > 1$$

Donde $l_t(j)$ representa la demanda por el tipo de trabajo $j \in [0,1]$. El objetivo de la empresa es maximizar el valor de la producción menos los costos laborales $\int_0^1 W_t(j) l_t(j) dj$, tomando como dados los precios. Es decir, la empresa se comporta de forma competitiva. Para tal efecto, defina $W_t(j)$ como el salario nominal del tipo de trabajo $j \in [0,1]$.

Cada tipo de trabajo $j \in [0,1]$ es ofertado por un consumidor. Es decir, existe un continuo (de medida unitaria) de consumidores. Cada consumidor $j \in [0,1]$ posee poder monopólico en la determinación de su salario nominal $W_t(j)$, consecuentemente los oferentes de trabajo se comportan de manera monopolística.

Las preferencias del consumidor $j \in [0,1]$ están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t [\tfrac{c_t(j)^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \tfrac{l_t(j)^{1+\varphi}}{1+\varphi}]$$

Cada consumidor $j \in [0,1]$ enfrenta una demanda $D_t(W_t(j))$ por su tipo de trabajo e incurre en un costo por cambiar su salario nominal.

$$\tfrac{\psi}{2} \tfrac{(W_t(j) - W_{t-1}(j))^2}{W_{t-1}}$$

(I) Interprete el parámetro $\eta$.

(II) Define un Equilibrio Competitivo Monopolístico para esta economía.

(III) Resuelve el problema de la empresa. Divida el problema en dos pasos. Primeramente obtenga la demanda de cada tipo de trabajo $D_t(W_t(j))$ mediante la minimización del costo laboral (análogo al problema de minimiziación del gasto que enfrentaba el consumidor cuando las rigideces nominales estaban en el precio de las variedades) y, posteriormente, maximice los beneficios de la empresa (valor de la producción menos costos laborales de todos los tipos de trabajo; alternativamente, podría demostrar que se cumple la siguiente igualdad $W_t l_t = \int_0^1 W_t(j) l_t(j) dj$, y maximizar los beneficios de la empresa en términos del agregador de trabajo $l_t$).

(IV) Resuelve el problema del consumidor, considerando que este maximiza sobre $c_t(j), B_t(j), W_t(j)$ y toma la demanda laboral $D_t(W_t(j))$ como dada.

(V) Caracterice el Equilibrio Competitivo Monopolístico. Es decir, escriba la Ecuación de Euler, la Condición de Factibilidad, la Condición de la Empresa, la Curva de Phillips y la Regla de tasa de interés (no necesita imponer una regla específica, solo recuerde que se necesita para tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas). ¿Para qué incógnitas resuelve este Equilibrio?

(VI) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social, asumiendo que todos los individuos son idénticos. Es decir, considere el siguiente problema de Planificación Central.[6]

$$\max \sum_t \beta^t [\tfrac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \tfrac{l_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}]$$

$$\text{s.t. } c_t = A_t l_t$$

(VII) Compare la solución del Equilibrio Competitivo Monopolístico con la del Planeador Social y encuentra la política fiscal (impuestos) y monetaria (tasa nominal de interés) que genera el mayor nivel de bienestar.

## III. Modelo Neokeynesiano con salarios pegajosos e impuesto al costo laboral

(Examen final verano 2017) En clase se estudió un modelo Neokeynesiano en el que las rigideces nominales generaban que el precio de los bienes fuera pegajoso; mientras que el mercado laboral se comportaba de manera clásica, en el sentido de que un salario flexible vaciaba el mercado laboral. En esta pregunta, se considera un modelo Neokeynesiano con salarios pegajosos y precio del bien flexible.

Adicionalmente, se considera la existencia de un gobierno que cobra a la empresa un impuesto $\tau_t$ al costo laboral, el cual es utilizado para proveer una transferencia de suma fija real $S_t$ a cada consumidor.

La empresa representativa produce el único bien en la economía mediante una tecnología de Rendimientos Decrecientes a Escala descrita por la siguiente función de producción.

[6] En estricto sentido, existe una cantidad no numerable de soluciones al problema del Planeador Social, se va a considerar una solución específica: aquella en que los individuos son idénticamente ponderados en la función de bienestar social.

$$y_t = Al_t^{\alpha}, \quad \alpha \in (0,1)$$
$$\text{donde } l_t = [\int_0^1 l_t(j)^{\frac{\eta-1}{\eta}} dj]^{\frac{\eta}{\eta-1}}, \text{ con } \eta > 1$$

Donde $l_t(j)$ representa la demanda por el tipo de trabajo $j \in [0,1]$. El objetivo de la empresa es maximizar el valor de la producción menos los costos laborales incluyendo el impuesto $\tau_t$, tomando como dados los precios. Es decir, la empresa se comporta de forma competitiva y el impuesto es el mismo para todos los tipos de trabajo. Para tal efecto, defina $W_t(j)$ como el salario nominal del tipo de trabajo $j \in [0,1]$. Los beneficios reales $\Omega_t$ de la empresa son repartidos equitativamente entre los consumidores.

Cada tipo de trabajo $j \in [0,1]$ es ofertado por un consumidor. Es decir, existe un continuo (de medida unitaria) de consumidores. Cada consumidor $j \in [0,1]$ posee poder monopólico en la determinación de su salario nominal $W_t(j)$. Consecuentemente, los oferentes de trabajo se comportan de manera monopolística.

Las preferencias del consumidor $j \in [0,1]$ están descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t [\tfrac{c_t(j)^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \varphi \log(l_t(j))]$$

Cada consumidor $j \in [0,1]$ enfrenta una demanda $D_t(W_t(j))$ por su tipo de trabajo e incurre en un costo por cambiar su salario nominal.

$$\tfrac{\psi}{2} \tfrac{(W_t(j) - W_{t-1}(j))^2}{W_{t-1}}$$

Cada consumidor puede consumir el único bien bien en la economía o ahorrar. Lo anterior es satisfecho con su ingreso laboral neto del costo en cambio en salario, con el retorno del bono del periodo anterior y con la transferencia de suma fija.

El gobierno financia la provisión de la transferencia de suma fija $S_t$ a cada consumidor mediante el impuesto $\tau_t$ al costo laboral en que incurre la empresa. La tasa impositiva $\tau_t$ se encuentra exógenamente determinada. El gobierno no tiene acceso a los mercados financieros. Se mantiene un presupuesto balanceado en cada periodo.

(I) Defina un Equilibrio Competitivo Monopolístico para esta economía.

(II) Resuelva el problema de la empresa. Siga los siguientes pasos: (a) Minimizar el costo laboral y demostrar que el costo laboral de todos los tipos de trabajo es el costo laboral del agregador de trabajo. (b) Maximizar los beneficios de la empresa.

(III) Con base en el procedimiento de su respuesta anterior, demuestre que la elasticidad de la variedad $j$ respecto a su mismo precio es $-\eta$ y que la elasticidad de la variedad $j$ respecto al precio de la variedad $k$ ($\neq j$) es cero.

(IV) Resuelve el problema del consumidor, considerando que este maximiza sobre $c_t(j), B_t(j)$ y $W_t(j)$ y toma la demanda laboral $D_t(W_t(j))$ como dada. Posteriormente, argumenta simetría y simplifica la CPO de $W_t(j)$.

(V) Caracterice el Equilibrio Competitivo Monopolístico. Es decir, escriba el conjunto de ecuaciones que permiten resolver las variables del equilibrio.

(VI) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social, considerando que todos los individuos son idénticamente ponderados en la función de bienestar social.

(VII) Compare la solución del Equilibrio Competitivo Monopolístico con la del Planeador Social y encuentre la política fiscal y monetaria que genera el mayor nivel de bienestar.

(VIII) Con base en su respuesta al inciso anterior, halle (en términos de los parámetros del modelo) el valor de $c_t, l_t, S_t, \Omega_t, W_t, P_t$ asociado a dicho Equilibrio Competitivo Monopolístico.

(IX) ¿Cuál es el valor de la tasa de interés nominal? ¿Se cumple la Regla de Friedman? Explique.

## IV. Modelo Neokeynesiano con diferentes productividades de las variedades

Considere el modelo Neokeynesiano visto en clase con diferentes productividades. El consumidor representativo tiene preferencias descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\sum_t \beta^t [\tfrac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \tfrac{l_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}]$$
$$\text{donde } c_t := [\textstyle\int_0^1 c_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dj]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \text{ con } \varepsilon > 1$$

Donde $c_t(j)$ representa el consumo de la variedad $j \in [0,1]$ y $l_t$ el tiempo destinado a trabajar. Cada variedad $j \in [0,1]$ es producida por un monopolista, el cual cuenta con una tecnología lineal en el trabajo.

$$y_t(j) = A_t(j) l_t(j), \text{ donde } A_t(j) = \begin{cases} \underline{A} \text{ si } j \in [0, 1/2] \\ \overline{A} \text{ si } j \in (1/2, 1] \end{cases}, \text{ con } 0 < \underline{A} < \overline{A}$$

Cada monopolista enfrenta una demanda $D_t(P_t(j))$ e incurre en un costo por cambiar sus precios.

$$\tfrac{\gamma}{2} \tfrac{(P_t(j) - P_{t-1}(j))^2}{P_{t-1}}$$

Cada monopolista maximiza el flujo descontado de beneficios eligiendo el precio de su variedad $P_t(j)$.

(I) Define un Equilibrio Competitivo Monopolístico para esta economía.

(II) Resuelve el problema del consumidor. Primeramente obtenga la demanda de cada variedad $j \in [0,1]$ y, posteriormente, calcule la condición de Ocio - Consumo y la ecuación de Euler.

(III) Resuelve el problema de la empresa monopolística $j \in [0,1]$, considerando que todas las empresas son idénticas.

(IV) Caracterice el Equilibrio Competitivo Monopolístico. Es decir, escriba la Condición Ocio - Consumo, la Ecuación de Euler, un par de Condiciones de Factibilidad, un par Curva de Phillips y la Regla de tasa de interés (no necesita imponer una regla específica, solo recuerde que se necesita para tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas). ¿Para qué incógnitas resuelve este Equilibrio?

(V) Solo para este inciso. ¿Cómo cambiarían sus resultados si $A_t(1/2) = \overline{A}$?

(VI) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social.

(VII) Compare la solución del Equilibrio Competitivo Monopolístico con la del Planeador Social y encuentra la política fiscal (impuestos) y monetaria (tasa nominal de interés) que genera el mayor nivel de bienestar.

## V. Modelo Neokeynesiano con ponderaciones de las variedades en el índice de consumo

Considere el modelo Neokeynesiano visto en clase con ponderaciones de las variedades en el índice de consumo y diferentes productividades. El consumidor representativo tiene preferencias descritas por la siguiente función de utilidad.

$$\textstyle\sum_t \beta^t [\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{l_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}]$$

$$\text{donde } c_t := [\textstyle\int_0^1 B_t(j) c_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dj]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \text{ con } \varepsilon > 1$$

Donde $c_t(j)$ representa el consumo de la variedad $j \in [0,1]$, $B_t(j)$ es un parámetro del gusto por cada variedad $j \in [0,1]$, y $l_t$ el tiempo destinado a trabajar. Las variedades pueden tener distintas ponderaciones el índice de consumo $B_t(j) \neq B_t(k)\ \forall j \neq k$. Cada variedad $j \in [0,1]$ es producida por un monopolista, el cual cuenta con una tecnología lineal en el trabajo.

$$y_t(j) = A_t(j) l_t(j)$$

La producción de las variedades puede tener distinta productividad $A_t(j) \neq A_t(k)\ \forall j \neq k$. Cada monopolista enfrenta una demanda $D_t(P_t(j))$ e incurre en un costo por cambiar sus precios.

$$\tfrac{\gamma}{2} \tfrac{(P_t(j) - P_{t-1}(j))^2}{P_{t-1}}$$

Cada monopolista maximiza el flujo descontado de beneficios eligiendo el precio de su variedad $P_t(j)$.

(I) Define un Equilibrio Competitivo Monopolístico para esta economía.

(II) Resuelve el problema del consumidor. Primeramente obtenga la demanda de cada variedad $j \in [0,1]$ y, posteriormente, calcule la condición de Ocio - Consumo y la ecuación de Euler.

(III) Resuelve el problema de la empresa monopolística $j \in [0,1]$, considerando que todas las empresas son idénticas.

(IV) ¿Existe alguna condición sobre los parámetros bajo la cual se pueda obtener simetría en el actuar de las empresas? De ser así, especifique e imponga dicha condición durante el resto del problema.

(V) Caracterice el Equilibrio Competitivo Monopolístico. Es decir, escriba la Condición Ocio - Consumo, la Ecuación de Euler, la Condición de Factibilidad, la Curva de Phillips y la Regla de tasa de interés (no necesita imponer una regla específica, solo recuerde que se necesita para tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas). ¿Para qué incógnitas resuelve este Equilibrio?

(VI) Plantee y resuelva el problema del Planeador Social.

(VII) Compare la solución del Equilibrio Competitivo Monopolístico con la del Planeador Social y encuentra la política fiscal (impuestos) y monetaria (tasa nominal de interés) que genera el mayor nivel de bienestar.

## VI. Modelo Neokeynesiano con rigideces nominales a la Calvo

Una proporción $\theta$ de las empresas no puede ajustar su precio en el periodo $t$. En el periodo $t$ el objetivo de la empresa es maximizar

$$\sum_k \theta^k Q_{t,t+k}[P_t^* y_{t+k}(j) - W_{t+k} l_{t+k}(j)]$$

Con respecto a $P_t^*$, sujeto a la función de producción $y_{t+k}(j) = A_{t+k} l_{t+k}(j)$ y a la demanda $y_{t+k} = D_{t+k}(P_t^*)$. Donde $Q_{t,t+k} = (\prod_{m=0}^{k-1} \frac{1}{1+i_{t+m}})$.

## VII. Modelo Neokeynesiano con dos industrias

$$\sum_t \beta^t [\frac{[c_t^{\nu} d_t^{1-\nu}]^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{l_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}]$$

$$\text{donde } c_t := [\int_0^1 c_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dj]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \text{ con } \varepsilon > 1$$

$c_t$ es un agregador de variedades y $d_t$ es otro bien producido en competencia perfecta. Puede ser así, o que $d_t$ sea producido de manera monopolística, también.

## VIII. Modelo Neokeynesiano con rigideces diferenciadas

Costo por cambiar los precios:

$$\frac{\gamma}{2}\frac{(P_t(j)-P_{t-1}(j))^2}{P_{t-1}} \text{ si } P_t(j) > P_{t-1}(j)$$

$$\frac{\nu}{2}\frac{(P_t(j)-P_{t-1}(j))^2}{P_{t-1}} \text{ si } P_t(j) < P_{t-1}(j)$$

## IX. Modelo NeoKeynesiano con *rule-of-thumb consumers*

Consumidores que no tienen acceso a los mercados financieros y consumen la totalidad de su ingreso disponible.

## X. Modelo Neokeynesiano con insumos diferenciados

Empresa del bien final es perfectamente competitiva y cuenta con RCS en los insumos diferenciados:

$$Y_t = (\int_0^1 X_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dj)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

Recuperar índice de precios $P_t$ con la condición de cero beneficios.

Competencia monopolística en la producción de insumos intermedios.

# 8

# Implementación numérica de un modelo macroeconómico

## 8.1. Introducción

Debido a que son pocos los modelos que se pueden resolver de forma analítica y gracias al progreso tecnológico, es considerablemente útil aprender a utilizar la computadora para resolver modelos macroeconómicos.

En esta sección se resolverá un modelo sin incertidumbre mediante el *shooting algorithm*. La programación se realizará en el *software* MatLab.

## 8.2. Descripción de la economía

Se resolverá el problema del planeador social del primer modelo desarrollado en este documento: saldos reales en la función de utilidad.

$$\max \sum_t \beta^t u(c_t, m_t, 1-l_t)$$
$$\text{s.t. } c_t + k_t = F(k_{t-1}, l_t) + (1-\delta)k_{t-1}$$
$$k_{-1} \text{ dado}$$

Se obtienen las CPO.

$$c_t: \quad u_{c_t} = \lambda_t$$
$$l_t: \quad u_{h_t} = \lambda F_{l_t}$$
$$k_t: \quad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(F_{k_t} + (1-\delta))$$
$$m_t: \quad u_{m_t} = 0$$

Combinando las CPO, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, el cual (más las condiciones iniciales y de transversalidad) caracteriza la solución del Equilibrio Competitivo para $\{c_t, k_t, l_t, m_t\}$

Ecuación de Euler

$$\frac{1}{\beta}\frac{u_{c_t}}{u_{c_{t+1}}} = F_{k_t} + (1-\delta)$$

Ocio - Consumo

$$\frac{u_{h_t}}{u_{c_t}} = F_{l_t}$$

Factibilidad

$$c_t + k_t = F(k_{t-1}, l_t) + (1-\delta)k_{t-1}$$

Saldos reales

$$u_{m_t} = 0$$

## 8.3. Procedimiento

El anterior sistema de ecuaciones constituye el punto más lejano al que se puede llegar al resolver el modelo de forma analítica. A continuación se describe, de manera genérica, el procedimiento para implementar numéricamente un modelo macroeconómico sin incertidumbre.

1. Especificar un modelo y caracterizarlo.
2. Imponer formas funcionales.
3. Establecer valores para los parámetros.
4. Resolver Estado Estacionario y Transición

## 8.4. Imponer formas funcionales

Para el modelo descrito con antelación, hay dos funciones que deben ser especificadas: la función de utilidad instantánea $u$ y la función de producción $F$. Por parsimonia, se consideran las siguientes formas:

$$u(c, m, 1-l) = \log(c) + m(2 - \phi m) + \gamma \log(1 - l_t)$$

$$F(k, l) = k^{\alpha} l^{1-\alpha}$$

## 8.5. Establecer valores para los parámetros

Método de calibración: Utilizar información sobre valores promedio de datos reales para elegir parámetros del modelo, acorde en el estado estacionario.

Primeramente, se identifican los parámetros por calibrar. En este caso:

$$\beta, \delta, \alpha, \gamma, \phi$$

Al contar con cinco parámetros por calibrar se deben considerar cinco objetivos de calibración:

$$\tfrac{k}{y} = 2{,}5, \quad \tfrac{x}{y} = 0{,}2, \quad r = 0{,}04, \quad l = \tfrac{1}{3}, \quad m =$$

Cabe mencionar que un periodo corresponde a un año.

En el Estado Estacionario:

$$\tfrac{1}{\beta} = 1 + r \Longrightarrow \beta = \tfrac{1}{1{,}04} \simeq 0{,}96$$

$$x = \delta k \Longrightarrow \delta = \tfrac{x/y}{k/y} = \tfrac{0{,}2}{2{,}5} = 0{,}08$$

$$\tfrac{1}{\beta} = F_k + (1-\delta) \Longrightarrow \tfrac{1}{\beta} - (1-\delta) = \alpha k^{\alpha-1} l^{1-\alpha} = \alpha \tfrac{y}{k} \Longrightarrow \alpha = \tfrac{k}{y}[\tfrac{1}{\beta} - (1-\delta)] = 0{,}3$$

$$\tfrac{u_h}{u_c} = F_l \Longrightarrow \tfrac{\gamma c}{1-l} = (1-\alpha) k^{\alpha} l^{-\alpha} = (1-\alpha)\tfrac{y}{l} \Longrightarrow \gamma = (1-\alpha)\left(\tfrac{y}{c}\right)\left(\tfrac{1-l}{l}\right) =$$
$$(1-\alpha)\left(\tfrac{1}{1-x/y}\right)\left(\tfrac{1-l}{l}\right) = 1{,}75$$

$$u_m = 0 \Longrightarrow 2 - 2\phi m = 0 \Longrightarrow \phi = \tfrac{1}{m} =$$

## 8.6. Solución del Estado Estacionario

Habiendo impuesto valores para los parámetros del modelo, se puede resolver el Estado Estacionario del planeador social. Así, el siguiente sistema de tres ecuaciones caracteriza la solución para $c, k, l$.

$$c = k^{\alpha} l^{1-\alpha} - \delta k$$

$$\tfrac{\gamma c}{1-l} = (1-\alpha) k^{\alpha} l^{-\alpha}$$

$$\tfrac{1}{\beta} = \alpha k^{\alpha-1} l^{1-\alpha} + (1-\delta)$$